

LOGIIKKA – johdantoa

Logiikan tehtävä: Logiikka tutkii *ajattelun ja päättelyn sääntöjä ja muodollisten päättelyiden oikeellisuutta*, ja pyrkii erottamaan oikeat päättelyt vääristä.

Siis, logiikka on oppia oikeasta päättelystä. Tätä päättelyä, eli logiikan tarpeita, varten on erityisesti luotu/laadittu ns. formaaliset eli muodolliset kielet, joita ovat:

1. Lauselogiikan kieli eli
propositiologiikan kieli

2. Predikaattilogiikan kieli

Propositio eli väitelause =
suljettu lause (ei riipu mistään)
"Tänään sataa" tai " $2 + 2 = 4$ "
HUOM! Päättelyyn voidaan käyttää myös luonnollista kieltä, esim. äidinkieltä.

Predikaatti eli väitelause =
avoin lause (riippuu jostakin)
"Tämä mies on Suomen tasavallan presidentti" tai
" $2 + x = 4$ "

Totuusarvo: Logiikkaan liittyy käsite *totuusarvo*, joka on *tosi* (1) tai *epätosi* (0). Kolmatta vaihtoehtoa ei ole, tämä on ns. "kielletty kolmannen laki". Lisäksi totuusarvo ei voi olla samaan aikaan tosi ja epätos, tämä on ns. "kielletyn ristiriidan laki".

Esimerkkejä

- 1) "Helsinki on Suomen pääkaupunki" on propositio, joka tiedetään todeksi.
- 2) "Joukon $\{1,2,3,4\}$ suurin luku on 10" on epätosi propositio.
- 3) Kieliopillisesti oikeat lauseet, kuten "Hyvää huomenta!" ja "Kunpa hiihtoloma jo alkaisi" eivät ole propositioita, koska ne eivät sisällä väitettä \rightarrow niihin ei voi liittää näin ollen totuusarvoa.
- 4) Ilmaisuihin " $x + 2 = 5$ " ei ole propositio, sillä sen totuusarvo riippuu x :stä. Kyseinen ilmaisu on predikaatti.
- 5) "Tuo komea matemaatikko on lahtelainen." sisältää väitteen, joka on tosi tai epätosi sen mukaan kuka matemaatikko on kyseessä. Koska lauseen totuus riippuu kohteesta, kyseessä on avoin lause eli predikaatti. (Vai riippuuko...☺?)

Lauselogiikkaa

Määritelmä, suljettu väitelause eli propositio:

Propositio eli suljettu väitelause on ilmaisu, joka sisältää toden tai epätoden väitteen. Kutsutaan usein lyhyesti vain "lauseeksi", jolloin tällä sanalla on eri merkitys kuin kieliopissa tai varsinaisessa matemaatiikassa (Matikassa Lause = Theorem on tulos, joka pitää todistaa).

Esimerkkejä

- 1) "Kuu on juustoa" on epätosi propositio eli epätosi väitelause.
- 2) " $2 + 2 = 4$ " on tosi propositio eli tosi väitelause.
- 3) Lauseen "Luvun π ensimmäinen desimaali on 4" totuusarvo on 0.
- 4) Lauseen "Luvun π toinen desimaali on 4" totuusarvo on 1.
- 5) Lauseen "Luvun $\pi 10^{999}$ desimaali on 4" totuusarvoa ei tiedetä.

Totuusarvolle pätee seuraavat lait:

Kielletyn kolmannen laki: Lauseen totuusarvo on joko tosi tai epätosi, kolmatta mahdollisuutta ei ole.

Kielletyn ristiriidan laki: Lauseen totuusarvo ei voi olla yhtä aikaa sekä tosi että epätosi.

Luonnollisen kielen lauseita, esim. "Tänään on maanantai." voidaan merkitä lyhyesti kirjaimilla, siis p = "Tänään on maanantai". Tällöin sanotaan, että luonnollinen kieli formalisoidaan, eli muodollistetaan.

Propositio- eli lauselogiikassa tutkitaan annetuista lauseista (ns. atomilauseista) **loogisilla konnektiiveilla** muodostettuja uusia lauseita (ns. yhdistettyjä eli molekyylilauseita) ja niiden totuusarvoja.

Tavallisimmat konnektiivit ovat: *negaatio* ("ei"), *konjunktio* ("ja"), *disjunktio* ("tai"), *implikaatio* ("jos...niin") ja *looginen ekvivalenssi* ("jos ja vain jos...niin"). Olkoot p ja q propositioita, jolloin konnektiivien lukutavat ja merkinnät ovat:

Merkintä	Nimitys	Lukutapa
$\neg p$	p :n negaatio	"ei p "
$p \wedge q$	p :n ja q :n konjunktio	" p ja q "
$p \vee q$	p :n ja q :n disjunktio	" p tai q "
$p \Rightarrow q$	p :n ja q :n implikaatio	"jos p niin q "
$p \Leftrightarrow q$	p :n ja q :n ekvivalenssi	" p jos ja vain jos q "

Huomautus:

- 1) Atomilauseita voidaan merkitä myös isoilla kirjaimilla A, B, C jne.
- 2) *Negatio* vastaa luonnollisen kielen ilmaisua "ei ole niin, että".
- 3) *Konjunktio* on merkitykseltään sama kuin luonnollisen kielen "ja".
- 4) *Disjunktio* on sitä vastoin kaksi eri merkitystä luonnollisessa kielessä, *inklusiivinen*, eli sisältävä merkitys ja *eksklusiivinen*, eli poissulkeva merkitys.

- Inklusiivinen merkitys tarkoittaa sitä, että disjunktio yhdistämistä atomilauseista jompikumpi on tosi tai molemmat ovat tosia. Esim.: *Työhön voidaan valita henkilö, jolla on alan tutkinto tai viisi vuotta työkokemusta*. Lienee selvää, että myös ne ehdokkaat, joilla molemmat ehdot täyttyvät, ovat kelvollisia.
- Eksklusiivinen merkitys tarkoittaa poissulkevaa joko...tai merkitystä (ei molemmat). Tällöin täsmälleen toinen atomilauseista on tosi. Esim.: *Jälkiruokana on kuppi kahvia tai jäätelöannos*.

Lauselogiikassa tai-sanalle ei jätetä tulkinnanvaraisuutta, nimittäin tai-ilmaisu tarkoittaa aina inklusiivista eli "jompikumpi tai molemmat" vaihtoehtoa. (Siis matemaatikot voivat ottaa kahvin ja jäätelön ☺)

Totuustaulukot

LUKUTEORIA JA TO-
DISTAMINEN, MAA11

Atomilauseista konnektiiveilla muodostettuja (molekyyli)lauseita on mahdollisuus edelleen yhdistää ja saada näin yhä mutkikkaampia lauseita. Uusien (molekyyli)lauseiden totuusarvot saadaan helpoimmin selville *totuustaulukoita* eli *totuusarvotaulukkoa* käyttäen.

Totuustaulukossa käsitellään kaikki atomilauseiden totuusarvovaihtoehtot. Tosi merkitään 1:llä ja epätosi 0:lla. Totuustaulukon sarakkeet ovat eri lauseita ja rivit ovat ko. sarakkeen lauseen totuusarvo.

Määritelmä, loogiset konnektiivit:

Loogiset konnektiivit

$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
määritellään seuraavilla totuustaulukoilla.

		Konjunktio		
		p	q	$p \wedge q$
Negatio	p	1	1	1
	$\neg p$	1	0	0
	0	0	1	0
	1	0	0	0

Disjunktio		
p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implikaatio		
p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

!

Ekvivalenssi		
p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Esimerkkejä:HUOM! Tässä p ja q ovat atomilauseita.

Olkoot p = "Sami voitti lotossa" ja q = "Sami on onnellinen". Esitä sanoin lauseet **a)** $\neg p$, **b)** $p \wedge q$

Ratkaisut:

a) "Ei pidä paikkaansa, että Sami voitti lotossa." tai lyhyemmin "Sami ei voittanut lotossa."

b) "Sami voitti lotossa ja on Sami on onnellinen."

Olkoot p = "Lore on koira" ja q = "Lore on fiksu". Esitä sanoin lauseet

a) $\neg(\neg p)$, **b)** $p \vee \neg q$

Ratkaisut:

a) "Ei pidä paikkaansa, että Lore ei ole koira." (Siis Lore on koira.)

b) "Lore on koira tai Lore ei ole fiksu."

Huomautus (jatkuu):

5) *Implikaatio* $p \Rightarrow q$ voidaan lukea "jos p , niin q " asemasta ilmaista myös sanomalla, että

" p on **riittävä** ehto q :lle" tai " q on **välttämätön** ehto p :lle"

Luonnollisessa kielessä ilmaisua "jos ..., niin ..." käytetään monessa eri merkityksessä. Kun sanotaan "jos p , niin q ", tarkoitetaan usein sitä, että p :stä seuraa q , eli että p on q :n **syy**. Lauselogiikassa implikaatio ei ilmaise syy-yhteyttä, sillä p :llä ja q :lla ei tarvitse olla mitään sisällöllistä tekemistä toistensa kanssa.

6) *Ekvivalenssi* $p \Leftrightarrow q$ voidaan lukea " p jos ja vain jos q " ohella ilmaista myös sanomalla

" p on **yhtäpitävä** q :n kanssa",

" p ja q ovat **ekvivalentteja**"

" p on **välttämätön ja riittävä** ehto q :lle" tai

" p **täsmälleen silloin** kun q "

Implikaation tapaan ekvivalenssin atomilauseilla ei tarvitse olla syy-yhteyttä.

Esimerkkejä:

HUOM! Tässä p ja q ovat atomilauseita.

Olkoot p = "Sami voitti lotossa" ja q = "Sami on onnellinen". Esitä sanoin lauseet **a)** $\neg p$, **b)** $p \wedge q$, **c)** $p \Rightarrow q$, **d)** $\neg p \Rightarrow \neg q$

Ratkaisut:

a) "Ei pidä paikkaansa, että Sami voitti lotossa." tai lyhyemmin "Sami ei voittanut lotossa."

b) "Sami voitti lotossa ja on Sami on onnellinen."

c) "Jos Sami voitti lotossa, niin Sami on onnellinen."

d) "Jos Sami ei voittanut lotossa, niin Sami ei ole onnellinen."

Olkoot p = "Lore on koira" ja q = "Lore on fiksu". Esitä sanoin lauseet

a) $\neg(\neg p)$, **b)** $p \vee \neg q$, **c)** $p \Leftrightarrow q$, **d)** $\neg p \Rightarrow \neg q$

Ratkaisut:

a) "Ei pidä paikkaansa, että Lore ei ole koira." (Siis Lore on koira.)

b) "Lore on koira tai Lore ei ole fiksu."

c) "Lore on koira jos ja vain jos Lore on fiksu."

d) "Jos Lore ei ole koira, niin Lore ei ole fiksu."

Esimerkkejä:

Olkoot q = "Ulkona sataa lunta" ja p = "Ulkona on kylmä". Esitä logiikan symbolein lauseet **a)** Ulkona sataa lunta, jos on kylmä. **b)** Välttämättömän ehto sille, että ulkona on kylmä on se, että ulkona sataa lunta. **c)** Ulkona ei ole kylmä, jos ulkona ei sada lunta.

Ratkaisut:

- a) $p \Rightarrow q$
 b) $p \Rightarrow q$
 c) $\neg q \Rightarrow \neg p$

Esimerkkejä:

1) Olkoot p = "3 on parillinen luku" ja q = "4 on parillinen luku". Propositioista edellinen on epätosi ja jälkimmäinen tosi. Tällöin disjunktio $p \vee q$ = "3 on parillinen luku tai 4 on parillinen luku" on tosi.

2) Olkoot p = "vuosi 2012 on karkausvuosi" ja q = "Suomi on EU:n jäsen". Implikaatio $p \Rightarrow q$ on tosi, sillä molemmat atomilauseet ovat tosia.

3) Olkoot p = " $2 + 2 = 4$ ", q = "Kuu on juustoa" ja r = " $2 + 2 = 5$ ". Tällöin $p \Rightarrow q$ tarkoittaa lausetta: "Jos $2 + 2 = 4$, niin Kuu on juustoa", mikä on epätosi. Sen sijaan lause $r \Rightarrow q$ eli: "Jos $2 + 2 = 5$, niin Kuu on juustoa", on tosi. Vaikka tämä kuulostaa järjettömältä, se voidaan selittää näin. Jos $2 + 2$ olisi 5, niin silloin maailma olisi sen verran sekaisin, että kaikki olisi mahdollista, myös Kuu voisi olla juustoa. Koska $2 + 2$ ei ole 5, kuun pinnan laadusta ei voi tämän sinänsä toden implikaation perusteella sanoa yhtään mitään.