Predikaattilogiikkaa

Kertausta

Logiikan tehtävä: Logiikka tutkii *ajattelun ja päättelyn sääntöjä ja muodollisten päättelyiden oikeellisuutta*, ja pyrkii erottamaan oikeat päättelyt vääristä.

Logiikassa käytettävät formaaliset eli muodolliset kielet:

1. Lauselogiikan kieli eli propositiologiikan kieli
2. Predikaattilogiikan kieli

Propositio eli väitelause $=$ suljettu lause (ei riipu mistään) "Tänään sataa" tai "$2+2=4$"

Predikaatti eli väitelause $=$ avoin lause (riippuu jostakin) "Tämä mies on Suomen tasavallan presidentti" tai "$2+x=4$"

Viime kerralla havaittiin, että lauselogiikka on liian alkeellinen kieli hiemankin monimutkaisemman päättelyn formalisoimiseksi kunnolla.

Määritelmä, avoin väitelause eli predikaatti:
Predikaatti eli *avoin väitelause* $p(x)$ on väite, jonka totuusarvo riippuu muuttujasta x. Kun tämän muuttujan paikalle sijoitetaan predikaatin (tarkemmin – predikaatin muuttujan) *määrittelyjoukon* X alkio, saadaan siis tosi tai epätosi suljettu lause.
Edelleen predikaatin *ratkaisujoukko* koostuu niistä määrittelyjoukon X alkioista x, joilla $p(x)$ on tosi. Jos $p(x)$ on tosi, niin sanotaan, että alkiolla x on ominaisuus p.

Huomautus Muuttujia voi olla enemmän kuin yksi. Tällöin puhutaan *kaksi*- tai *useampipaikkaisesta* predikaatista, jolloin merkitään $p(x,y)$, $q(x,y,z)$ ja $p(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

tai kaksoispiste

Esimerkkejä

1) Predikaatin $p(x)$ $=$"$(x-2)(x-3)=0$" määr.joukoksi voidaan ottaa esim. reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$. Propositiot $p(2)$ ja $p(3)$ ovat tosia. Kaikilla muilla x:n arvoilla saadaan epätosi propositio. Näin ollen predikaatin $p(x)$ ratkaisujoukko $L=\{2,3\}$.

2) Predikaatin $q(x) =$”x on kala” määr.joukoksi on luonnollista ottaa kaikkien eläinlajien joukko. Esimerkiksi $q(\text{lahna})$ ja $q(\text{hauki})$ ovat tosia, kun taas $q(\text{lehmä})$ ja $q(\text{ihminen})$ ovat epätosia. Predikaatin $q(x)$ ratkaisujoukko on kaikkien kalalajien joukko.

Kaksipaikkaiset predikaatit ilmoittavat muuttujien määrittelyjoukkojen alkioiden välisiä *suhteita*.

3) Kaksipaikkaisessa predik.:ssa $p(x, y) =$”x on kirjoittanut kirjan y” muuttujan x määrittelyjoukko on tiettyjen henkilöiden joukko ja muuttujan y määrittelyjoukko on tiettyjen kirjojen joukko, laajimmillaan kaikki maailman kirjailijat ja kirjat.
Esimerkiksi $p(\text{Aleksis Kivi}, \text{Seitsemän veljestä})$ on tosi lause.

Karkea tapa jäsentää luonnollisella kielellä kirjoitettu lause on jakaa se kahteen osaan: mitä tehdään ja kuka tai mikä tekee.

4) Lauseessa ”Hauki on kala” ollaan kaloja ja tekijänä on hauki. Lauseessa ”Kalle opiskelee logiikkaa” opiskellaan logiikkaa ja tekijänä on Kalle.

Tekijää eli subjektia vastaa logiikassa määrittelyjoukon alkio ja sen, mitä tehdään, ilmoittaa predikaatti. Tämä riittää logiikassa, mutta luonnollisessa kielessä lause jäsennetään tarkemmin (subjekti – predikaatti – objekti **TAI** attribuutti – subjekti – predikaatti – predikatiivi).

5) Muuttujan (muuttujia) sisältävät yhtälöt ja epäyhtälöt ovat predikaatteja eli avoimia lauseita.

a) Kolmipaikkainen predikaatti $p(x, y, z) =$”$x > y - z$”, jolloin $p(3,8,6)$ on tosi koska $3 > 8 - 6$ ja $p(-2,8,6)$ on epätosi.
b) Yhtälö $3x - 6 = 0$ on avoin lause, joka on tosi vain arvolla $x = 2$.
c) Jos avoin lause $x^2 + 1 > 0, x \in \mathbb{R}$ muutetaan muotoon ”kaikille reaaliluvuille x on voimassa $x^2 + 1 > 0$”, niin kyseessä ei enää ole avoin lause. Lauseen tekee suljetuksi alussa oleva kaikki-sana. Tähän palataan!

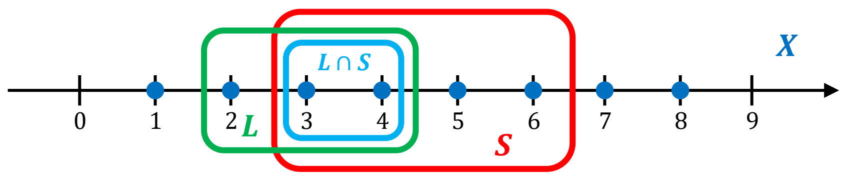
6) Joskus ratkaisujoukko on tyhjä joukko $\emptyset$ → monisteen esim. 3.24 b).

Konnektiivit predikaattilogiikassa

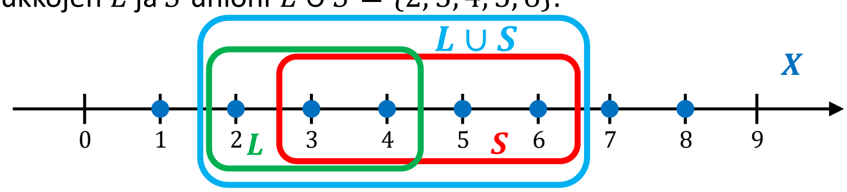
Kuten propositiologiikassa suljettujen lauseiden tapauksissa myös predikaattilogiikassa avoimista lauseista voidaan loogisilla konnektiiveilla muodostaa uusia avoimia lauseita.

Esimerkki Tarkastellaan joukossa $X = \{1, 2, \dots, 8\}$ määriteltyjä avoimia lauseita $p(x) =$”$2 \leq x \leq 4$” ja $q(x) =$”$3 \leq x \leq 6$”. Lauseen $p(x)$ ratkaisujoukko $L = \{2, 3, 4\}$ ja $q(x)$:n ratkaisujoukko $S = \{3, 4, 5, 6\}$.

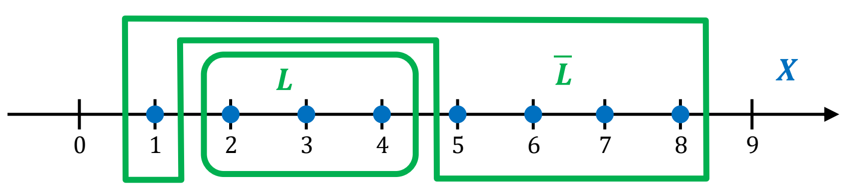
a) Lause $p(x) \wedge q(x)$ tarkoittaa lausetta ”$2 \leq x \leq 4$ ja $3 \leq x \leq 6$” eli lausetta ”$3 \leq x \leq 4$”. Ratkaisujoukko on lauseiden $p(x)$ ja $q(x)$ ratkaisujoukkojen L ja S leikkaus $L \cap S = \{3, 4\}$.



b) Lause $p(x) \vee q(x)$ tarkoittaa lausetta ”$2 \leq x \leq 4$ tai $3 \leq x \leq 6$” eli lausetta ”$2 \leq x \leq 6$”. Ratkaisujoukko on lauseiden $p(x)$ ja $q(x)$ ratkaisujoukkojen L ja S unioni $L \cup S = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.



c) Lause $\neg p(x)$ tarkoittaa lausetta ”Ei ole $2 \leq x \leq 4$” eli lausetta ”$x = 1$ tai $5 \leq x \leq 8$”. Ratkaisujoukko on lauseen $p(x)$ ratkaisujoukon L komplementti $\overline{L} = \{1, 5, 6, 7, 8\}$. Vastaavasti lauseen $\neg q(x)$ ratkaisujoukko on $\overline{S} = \{1, 2, 7, 8\}$.



Kvanttorit

Havaittiin, että avoimesta lauseesta $p(x)$ tulee suljettu, kun muuttujan x paikalle sijoitetaan jokin X:n alkio. Näin saatu lause kertoo jotakin tästä alkiosta x. Usein on syytä tutkia, onko joukon X ***kaikilla*** alkioilla ominaisuus p tai onko joukon X ***jollakin*** alkiolla kyseinen ominaisuus. Tarvitaan aiemmilta kursseilta tuttuja *kvanttoreita*.

Määritelmä, kaikkikvanttori eli universaalikvanttori:
Olkoon $p(x)$ joukossa X määritelty avoin lause. Jos joukon X *kaikilla* alkioilla x on ominaisuus p, eli $p(x)$ on tosi *aina*, kun $x \in X$, niin *kaikkikvanttorilla* $\forall$ suljettu lause

$$\forall\, x \in X{:}\, p(x)$$

on tosi. Muulloin se on epätosi. ($\forall$, niin kuin ”*all*” tai ”*alles*”)

Esimerkki Lause $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $x^2 \geq 0$ voidaan lukea esim.: ”Kaikilla reaaliluvuilla x on voimassa $x^2 \geq 0$.” **tai** ”Aina kun $x \in \mathbb{R}$, on $x^2 \geq 0$.” **tai** ”Jokainen reaaliluku x toteuttaa epäyhtälön $x^2 \geq 0$.” **tai** ”Jokaisen reaaliluvun neliö on ei-negatiivinen.” Tämä lause on tosi.

Huomautus Matematiikassa kirjoitetaan merkinnät usein toisinpäin eli merkinnän $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $x^2 \geq 0$ sijasta merkintä $x^2 \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}$. Tämä on kuitenkin vastoin predikaattilogiikan sääntöjä.

Jos lause $\forall\, x \in X{:}\, p(x)$ on epätosi, voidaan saada tosi lause pienentämällä määrittelyjoukkoa X sopivasti.

Esimerkki Lause $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $x^2 > 0$ on epätosi, sillä $0^2 = 0$, mutta kaikki muut x:n arvot toteuttavat epäyhtälön $x^2 > 0$. Näin ollen lause $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$: $x^2 > 0$ on tosi, missä $\setminus$ on joukko-opillinen erotus.

Määritelmä, olemassaolokvanttori eli eksistenssikvanttori:
Olkoon $p(x)$ joukossa X määritelty avoin lause. Jos joukossa X *on olemassa ainakin yksi* sellainen alkio x, jolla on ominaisuus p, eli jos $p(x)$ on tosi *jollakin* $x \in X$, niin *olemassaolokvanttorilla* $\exists$ suljettu lause

$$\exists\, x \in X{:}\, p(x)$$

on tosi. Muulloin se on epätosi. ($\exists$, niin kuin ”*exist*” tai ”*existieren*”)

Esimerkki Lause $\exists\, x \in \mathbb{R}\colon\ (x-2)(x-3) = 0$ voidaan lukea esimerkiksi: ”On olemassa sellainen reaaliluku x, jolle $(x-2)(x-3) = 0$.” **tai** ”Yhtälö $(x-2)(x-3)$ toteutuu jollakin $x \in \mathbb{R}$.” Tämä lause on tosi, löytyy jopa kaksi reaalilukua, nimittäin 2 ja 3.

Jos lause $\exists\, x \in X : p(x)$ on epätosi, niin yleensä saadaan tosi lause kasvattamalla määrittelyjoukkoa X sopivasti.

Esimerkki Lause $\exists\, x \in \mathbb{Z}\colon 2x = 3$ on epätosi, sillä yhtälön $2x = 3$ ratkaisu $x = \frac{3}{2}$ ei ole kokonaisluku. Sen sijaan lause $\exists\, x \in \mathbb{Q}\colon 2x = 3$ on tosi. Edellä olisi riittänyt kasvattaa joukko $\mathbb{Z}$ yhden alkion joukolla $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ eikä välttämättä koko $\mathbb{Q}$:lla. Lause $\exists\, x \in \mathbb{Z} \cup \left\{\frac{3}{2}\right\} : 2x = 3$ on tosi.

Esimerkki Formalisoi lause ”Koulun diskossa jokainen tyttö tanssii ainakin yhden pojan kanssa.”
Olkoon $p(x, y) =$”Koulun diskossa x tanssii y:n kanssa.” ja x tarkoittaa tyttöä ja y poikaa. Saadaan lause $\forall x\ \exists\, y\colon\ p(x, y)$.
Mitä tarkoittaa lause $\exists y\ \forall x\colon\ p(x, y)$?