Lisää kvanttoreista ja päättelyä sekä predikaattilogiikan totuustaulukot

LUKUTEORIA JA TODISTAMINEN, MAA11

1. Negaation siirto kvanttorin ohi

Esimerkki **a)** Lauseen ”Kaikki johtajat ovat miehiä” negaatio ei ole ”Kaikki johtajat ovat naisia”, vaan ”On olemassa (ainakin yksi) johtaja, joka on nainen” eli ”On olemassa (ainakin yksi) naisjohtaja”.
b) Lauseen ”On olemassa (ainakin yksi) rehellinen ihminen” negaatio ei ole ”On olemassa (ainakin yksi) epärehellinen ihminen”, vaan ”Kaikki ihmiset ovat epärehellisiä”.

Edellisestä esimerkistä havaitaan negaation vaikutus kvanttoreihin.

Lause, negaation siirto kvanttorin ohi:
Olkoon $p(x)$ joukossa X määritelty predikaatti. Tällöin lauseet

a) X on johtajien joukko ja $p(x)$ =”On mies”

$$\neg\left[\forall\, x \in X\colon\ p(x)\right] \Leftrightarrow\ \exists\, x \in X\colon\ \neg p(x)$$

$$\neg\left[\exists\, x \in X\colon\ p(x)\right] \Leftrightarrow\ \forall\, x \in X\colon\ \neg p(x)$$

b) X on ihmisten joukko ja $p(x)$ =”On reh.”

ovat tosia.

TOD.: Lause $\neg\left[\forall\, x \in X\colon\ p(x)\right]$ on tosi täsmälleen silloin, kun lause $\forall\, x \in X\colon\ p(x)$ on epätosi, eli kun on olemassa ainakin yksi sellainen $x \in X$, että $p(x)$ on epätosi. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että on olemassa ainakin yksi sellainen $x \in X$, että $\neg p(x)$ on tosi, joka logiikan kielellä kirjoitettuna on $\exists\, x \in X\colon\ \neg p(x)$. Näin on väite todistettu. Toinen väite vastaavalla tavalla.
Jos lauseessa on useita kvanttoreita, niin negaation siirtäminen niiden yli muuttaa ne kaikki. Tähän palataan.

2. Implikaatio ja ekvivalenssi predikaattilogiikassa / totuustaulukot

Propositioiden välisen implikaation tulkitseminen ”jos…, niin” -lauseeksi ja samoin ekvivalenssin tulkitseminen ”jos ja vain jos…, niin” –lauseeksi tuotti ongelmia. (Jos $2 + 2 = 5$, niin kuu on juusto.) Kun implikaatio- ja ekvivalenssimuotoiset lauseet suljetaan kaikkikvanttorilla, tällaista ongelmaa ei synny.

Esimerkki Tarkastellaan lausetta $\forall\, x \in \mathbb{R}\colon (x > 0 \Longrightarrow x + 1 > 0)$. Tutkitaan predikaatin (eli predikaatista sijoittamalla saadun suljetun lauseen) totuutta muuttujan x arvoilla. Saadaan taulukko.

x:n arvot	$x > 0$	$\Longrightarrow$	$x + 1 > 0$
$\boldsymbol{x \leq -1}$	0	**1**	0
$\boldsymbol{-1 < x \leq 0}$	0	**1**	1
$\boldsymbol{x > 0}$	1	**1**	1
	1	**2**	1

Lause on siis tosi. Taulukosta nähdään, että kaikki ne reaaliluvut x, jotka toteuttavat ehdon $x > 0$, toteuttavat myös ehdon $x + 1 > 0$.

Esimerkki Selvitä totuustaulukkoa käyttäen, onko lause tosi vai epätosi.

a) $\forall\, x \in \mathbb{R}: (x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2)$

b) $\forall\, x \in \mathbb{R}: (x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2)$

Ratkaisu

Käydään yksityiskohtaisesti läpi muuttujan x eri arvovälit molemmissa tapauksissa.

x:n arvot	$x^2 = 4$	$\Leftrightarrow$	$x = 2$
$\boldsymbol{x < -2}$	0	**1**	0
$\boldsymbol{x = -2}$	1	**0**	0
$\boldsymbol{-2 < x < 2}$	0	**1**	0
$\boldsymbol{x = 2}$	1	**1**	1
$\boldsymbol{x > 2}$	0	**1**	0
	1	**2**	1

Taulukosta nähdään, että lause on epätosi.

x:n arvot	$x^2 = 4$	$\Leftrightarrow$	$x = \pm 2$
$\boldsymbol{x < -2}$	0	**1**	0
$\boldsymbol{x = -2}$	1	**1**	1
$\boldsymbol{-2 < x < 2}$	0	**1**	0
$\boldsymbol{x = 2}$	1	**1**	1
$\boldsymbol{x > 2}$	0	**1**	0
	1	**2**	1

Taulukosta nähdään, että lause on tosi.

Matematiikassa kaikkikvanttori jätetään usein kirjoittamatta lauseesta $\forall\, x \in X\colon\ p(x)$. Erityisesti kun $p(x)$ on implikaatiolla tai ekvivalenssilla saatu yhdistetty lause. Lausetta $p(x)$ ei tulkita avoimeksi, vaan siinä tulkitaan muuttuja x kiinteäksi mutta mielivaltaiseksi arvoksi. Tähän asiaan törmää jatko-opinnoissa.

Matemaattisissa tarkasteluissa esiintyy usein ns. *ekvivalenssi-* ja *implikaatioketjuja*.

Esimerkki Ekvivalenssiketju $2x + 3 = 7 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$ tulkitaan lyhennysmerkinnäksi konjunktiolle

$$(2x + 3 = 7 \Leftrightarrow 2x = 4) \wedge (2x = 4 \Leftrightarrow x = 2),$$

missä kaikkikvanttori on jätetty merkitsemättä.

Kaikki aiemmin opitut lauselogiikan tautologiat ovat myös tautologioita predikaattilogiikassa. Lisäksi kvanttoreiden myötä saadaan uusia predikaattilogiikalle tyypillisiä tautologioita.

Esimerkiksi lauseet

$$\forall\, x\colon \big(p(x) \vee \neg p(x)\big), \qquad \forall\, x\colon p(x) \Leftrightarrow \neg\big(\exists\, x\colon \neg p(x)\big)$$

missä edellisen mukaan kaikilla x:n arvoilla (jostakin määrittelyjoukosta, jota ei nyt ole merkitty) lause $p(x)$ on voimassa tai sitten ei ole. Jälkimmäinen taas tarkoittaa, että lause $p(x)$ on tosi kaikilla x:n arvoilla jos ja vain jos ei ole olemassa yhtään sellaista muuttujan x arvoa, jolla lause $p(x)$ olisi epätosi. Vertaa negaation siirto – asiaan.

3. Useampi kuin yksi kvanttori

Kvanttoreita voidaan käyttää myös monipaikkaisten predikaattien yhteydessä.

Esimerkki Tarkastellaan lauseita

(1) $\forall\, x \in \mathbb{R}\colon \forall\, y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0,$

(2) $\exists\, x \in \mathbb{R}\colon \exists\, y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0,$

(3) $\forall\, x \in \mathbb{R}\colon \exists\, y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0,$

(4) $\exists\, y \in \mathbb{R}\colon \forall\, x \in \mathbb{R}\colon x + y = 0.$

Lauseessa (1) $\forall\, x \in \mathbb{R}\colon \forall\, y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ väitetään, että $x + y = 0$ aina, kun x ja y ovat reaalilukuja. Tämä on tietysti epätosi.

Lauseessa (2) $\exists\, x \in \mathbb{R}\colon \exists\, y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ taas väitetään, että on olemassa sellaiset reaaliluvut x ja y, joille $x + y = 0$. Tämä on tietysti tosi, kyseisiä lukupareja löytyy ääretön määrä.

Lause (3) $\forall\, x \in \mathbb{R}\colon \exists\, y \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ tarkoittaa: ”Kaikilla reaaliluvuilla x on olemassa sellainen reaaliluku y, että $x + y = 0$” **tai** ”Jokaista reaalilukua x kohti on olemassa…”. Lause on tosi, y:ksi kelpaa $-x$.

Lause (4) $\exists\, y \in \mathbb{R}\colon \forall\, x \in \mathbb{R}\colon x + y = 0$ tarkoittaa: ”On olemassa sellainen reaaliluku y, että kaikilla reaaliluvuilla x on voimassa $x + y = 0$” **tai** ”Löytyy sellainen reaalilukua y, että $x + y = 0$, olipa x mikä tahansa reaaliluku”. Lause on epätosi. Jos näet tällainen y löytyisi, niin pätisi $0 + y = 0$ ja $1 + y = 0$.

Lauseita (3) ja (4) tarkastelemalla voisi olettaa, että kvanttoria siirtämällä saisi helposti lauseesta toisen. Kuitenkin tosilause (3) muuttuu epätodeksi lauseeksi (4). Yleensä tällaisessa siirrossa saadaan alkuperäistä lausetta *ankarampi* lause. Eli uusi lause on epätosi, jos vanha lause on epätosi, mutta uusi lause voi olla epätosi vaikka vanha lause on tosi. Tämä johtuu siitä, että lauseessa (3) y saa riippua x:stä, mutta (4):ssa saman y:n on kelvattava kaikille x.

Esimerkki Tarkastellaan predikaattia $q(x, y) =$”x on naimisissa y:n kanssa”, jossa muuttujan x määrittelyjoukko M on tietty joukko aviomiehiä ja muuttujan y määrittelyjoukko N on heidän vaimojensa joukko. Tällöin lause

$$\forall\, x \in M\colon \exists\, y \in N\colon\ q(x, y)$$

on tosi, sillä jokaiselle aviomiehelle löytyy vaimo. Lause

$$\exists\, y \in N\colon \forall\, x \in M\colon\ q(x, y)$$

on sen sijaan epätosi (jos joukoissa M ja N on enemmän alkioita kuin yksi), sillä ei voi olla naista, joka olisi naimisissa kaikkien miesten kanssa (ainakaan Suomen avioliittolainsäädännön mukaan).

Lopuksi esimerkki, jossa tosi lause säilyy totena tällaisessa siirrossa.

Esimerkki ! Lause $\forall\, x \in \mathbb{R}\colon \exists\, y \in \mathbb{R}\colon\ xy = 0$ on tosi, sillä aina, kun x on annettu reaaliluku löytyy sellainen y, että $xy = 0$ ($y = 0$ kelpaa). Mutta tämä y ei riipu x:stä, joten on olemassa sellainen y (nimittäin juuri tämä $y = 0$), että jokaisella x on $xy = 0$. Näin ollen myös lause $\exists\, y \in \mathbb{R}\colon \forall\, x \in \mathbb{R}\colon\ xy = 0$ on tosi.

Palataan nyt aiemmin sanottuun … *Jos lauseessa on useita kvanttoreita, niin negaation siirtäminen niiden yli muuttaa ne kaikki.*
Siis esimerkiksi

$$\neg\big(\forall\, x \in X : \exists\, y \in Y :\ q(x,y)\big) \iff \exists\, x \in X : \big(\forall\, y \in Y :\ \neg q(x,y)\big)$$

TODISTUS: Käytetään negaation siirtosääntöä yhteen kvanttoriin kerrallaan:

$$\begin{aligned}\neg\big(\forall\, x \in X : \exists\, y \in Y :\ q(x,y)\big) &\iff \neg\Big(\forall\, x \in X : \big(\exists\, y \in Y :\ q(x,y)\big)\Big)\\ &\iff \Big(\exists\, x \in X : \neg\big(\exists\, y \in Y :\ q(x,y)\big)\Big)\\ &\iff \exists\, x \in X : \big(\forall\, y \in Y :\ \neg q(x,y)\big)\end{aligned}$$

Muut vastaavat kaavat samalla tavalla.
Huomautus Saman tyyppisten kvanttorien järjestys ei vaikuta syntyvän lauseen totuusarvoon. Lauseet

$$\forall\, x \in X : \forall\, y \in Y :\ q(x,y) \iff \forall\, y \in Y : \forall\, x \in X :\ q(x,y)$$

$$\exists\, x \in X : \exists\, y \in Y :\ q(x,y) \iff \exists\, y \in Y : \exists\, x \in X :\ q(x,y)$$

ovat tosia kaikille avoimille lausumille.