Tautologia ja päättelysääntöjä

LUKUTEORIA JA TO-DISTAMINEN, MAA11

Tarkastellaan molekyylilauseen $\neg p \Longrightarrow \neg p \vee q$ totuustaulukkoa eli totuusarvoja:

$\neg$	p	$\Longrightarrow$	$\neg$	p	$\vee$	q
0	1	**1**	0	1	1	1
0	1	**1**	0	1	0	0
1	0	**1**	1	0	1	1
1	0	**1**	1	0	1	0
2.	1.	**4.**	2.	1.	3.	1.

Havaitaan, että molekyylilauseen $\neg p \Longrightarrow \neg p \vee q$ totuusarvo on aina 1 eli tosi, riippumatta siitä mitkä ovat lauseiden p ja q totuusarvot. Tällainen lause on *tautologia* eli *identtisesti tosi lause*.

Määritelmä, tautologia:
Annetuista (atomi)lauseista loogisilla konnektiiveilla yhdistetty lause on *tautologia*, jos se on tosi alkuperäisten (atomi- tai molekyyli-) lauseiden totuusarvoista riippumatta.

Esimerkki 1:
Osoita, että lause $p \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q$ on tautologia. Taulukko:

p	$\wedge$	$(p$	$\Longrightarrow$	$q)$	$\Longrightarrow$	q
1	1	1	1	1	**1**	1
1	0	1	0	0	**1**	0
0	0	0	1	1	**1**	1
0	0	0	1	0	**1**	0
1.	3.	1.	2.	1.	**4.**	1.

OK

Tästä lauseesta $p \wedge (p \Longrightarrow q) \Longrightarrow q$ käytetään nimitystä *modus ponens* – päättely, tähän palataan.

Esimerkki 2:

Yhdistetty propositiolause (eli väite)

$$p \land \neg p$$

on aina epätosi riippumatta lauseen p totuusarvosta.

p	$\land$	$\neg$	p
1	**0**	0	1
0	**0**	1	0
1.	**3.**	2.	1.

Lauseita, jotka ovat aina epätosia, sanotaan *identtisesti epätosiksi* eli *kontradiktioiksi* (contradiction= ristiriita).

Negaatioon liittyen osoita, että ns. *kaksoisnegaation sääntö*

$$\neg\neg p \Leftrightarrow p$$

on tautologia.

$\neg$	$\neg$	p	$\Leftrightarrow$	p
1	0	1	**1**	1
0	1	0	**1**	0
3.	2.	1.	**4.**	1.

OK

Yhdistettyjä lauseita p ja q (kuten edellä $\overbrace{\neg\neg p}^{=q}$ ja p) sanotaan *loogisesti ekvivalenteiksi*, jos ne saavat saman totuusarvon kaikilla atomilauseiden totuusarvoyhdistelmillä. Tällöin ekvivalenssi $p \Leftrightarrow q$ on tautologia.

Esimerkki 3:

Määritä lauseiden

$$\neg(p \land q)$$

ja

$$\neg p \lor \neg q$$

totuustaulukot:

$\neg$	$(p$	$\land$	$q)$
0	1	1	1
1	1	0	0
1	0	0	1
1	0	0	0
3.	1.	2.	1.

$\neg$	p	$\lor$	$\neg$	q
0	1	**0**	0	1
0	1	**1**	1	0
1	0	**1**	0	1
1	0	**1**	1	0
2.	1.	**3.**	2.	1.

Havaitaan, että kyseisten lauseiden totuusarvot ovat aina samat riippumatta p:n ja q:n totuusarvoista. Lauseet ovat siis ekvivalentteja. Tällaisten lauseiden ekvivalenssi on tautologia, eli:

$\neg$	$(p$	$\land$	$q)$	$\Leftrightarrow$	$\neg$	p	$\lor$	$\neg$	q
0	1	1	1	**1**	0	1	0	0	1
1	1	0	0	**1**	0	1	1	1	0
1	0	0	1	**1**	1	0	1	0	1
1	0	0	0	**1**	1	0	1	1	0
3.	1.	2.	1.	**4.**	2.	1.	3.	2.	1.

Tautologia esittää yleispätevän loogisen totuuden. Merkitys on siinä, että ne ilmaisevat lauselogiikasta saatavat yleiset päättelysäännöt. Sanotaan, että päättely on ***loogisesti pätevä***, jos aina kun oletukset (premissit) ovat tosia, myös johtopäätös on tosi. Tautologioissa näin on aina!

Seuraavalla dialla on koottuna matemaattisissa päättelyissä keskeisiä tautologioita, moniste sivut 42-43.

Huomautus:
Älä sekoita käänteislausetta kontrapositiolakiin (öö…mikä kontrapositiolaki)
Käänteislause: lauseelle $p \Longrightarrow q$ käänteinen on $q \Longrightarrow p$
Kontrapositiolaki: $(p \Longrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$
Näihin palataan! Nyt voi jo todeta, että funktion injektiivisyys osoitetaan lähes aina kontrapositiolakia käyttäen. Annetun funktion injektiivisyys: $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, eli suomeksi; muuttujan x eri arvot kuvautuvat eri funktion arvoiksi. Tämä osoitetaan siis lähes aina näin:

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

Tautologia	Nimi
$p \Leftrightarrow p$	Identiteetin laki
$\neg(p \wedge \neg p)$	Poissuljetun ristiriidan laki
$p \vee \neg p$	Poissuljetun kolmannen laki
$\neg\neg p \Leftrightarrow p$	Kaksoisnegaation laki
$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	de Morganin säännöt
$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	
$p \wedge p \Leftrightarrow p$	Idempotenssilait
$p \vee p \Leftrightarrow p$	
$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$	Vaihdantalait
$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$	
$p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	Liitäntälait
$p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	
$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	Osittelulait
$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$	Implikaation ominaisuus
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$	
$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	Kontrapositiolaki

Esimerkki 4:

Sievennä lause $\neg(p \vee q \Rightarrow \neg p \wedge \neg q)$ muodostamalla mahdollisimman yksinkertainen sen kanssa yhtäpitävä lause. (Lauseiden ekvivalenttiutta voidaan merkitä $\Leftrightarrow$:n sijasta $\equiv$.)

Sovelletaan implikaation määritelmää esim 3. TAI edellinen dia, kaksoisnegaatiota, de Morgania ja idempotenssilakia, saadaan

$$\begin{aligned}\neg(p \vee q \Rightarrow \neg p \wedge \neg q) &\equiv \neg\neg\big((p \vee q) \wedge \neg(\neg p \wedge \neg q)\big)\\ &\equiv (p \vee q) \wedge (\neg\neg p \vee \neg\neg q)\\ &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee q)\\ &\equiv (p \vee q)\end{aligned}$$

Esimerkki 5:

Muodosta annetun lauseen kanssa ekvivalentti lause, jossa esiintyvät vain negaatio ja konjunktio

a) $p \vee q$ **b)** $p \Rightarrow q$

a) $p \vee q \equiv \neg\underbrace{\neg(p \vee q)}_{\text{de Morgan}} \equiv \neg[\neg p \wedge \neg q]$, OK. **b)** Kts. tautologiat.