Suurin yhteinen tekijä (s.y.t.) ja pienin yhteinen monikerta (p.y.m.)

Määritelmä, yhteinen tekijä ja suurin yhteinen tekijä:
Annettujen lukujen a ja b *yhteinen tekijä* on luku, jolla molemmat luvut ovat jaollisia. *Suurin yhteinen tekijä*, merkitään $\mathrm{syt}(a, b)$, on nimensä mukaisesti yhteisistä tekijöistä suurin.

Huomautus Määritelmä voidaan laajentaa kolmelle, neljälle, jne. luvulle ja tarkastella näiden annettujen lukujen (suurinta) yhteistä tekijää.

Annettujen lukujen suurin yhteinen tekijä määritetään jakamalla luvut ensin alkutekijöihin ja muodostamalla sitten **yhteisten alkutekijöiden tulo**. Eli vain ne alkutekijät, jotka esiintyvät kaikissa luvuissa!

Esimerkki 1 Määritä $\mathrm{syt}(84{,}120)$.
Alkutekijöihin jako antaa: $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ ja $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$. Yhteisiä tekijöitä molemmissa luvuissa on $2 \cdot 2 \cdot 3$ eli luku 2 kaksi kertaa ja luku kolme kerran → $\mathrm{syt}(84{,}120) = 12$.

Esimerkki 2 Määritä $\mathrm{syt}(60, 108{,}144)$.
Alkutekijöihin jako antaa:

$$60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$$

$$108 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^3$$

$$144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^4 \cdot 3^2$$

Yhteisiä tekijöitä kaikissa luvuissa on $2 \cdot 2 \cdot 3$ → $\mathrm{syt}(60{,}108{,}144) = 12$.

Esimerkki 3 Määritä $\mathrm{syt}(140, 117)$.
Alkutekijöihin jako antaa:

$$140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$$

$$117 = 3 \cdot 3 \cdot 13 = 3^2 \cdot 13$$

Ja havaitaan, ettei yhteisiä tekijöitä ole…vai onko?
Kyllä on, nimittäin luku 1 → $\mathrm{syt}(140{,}117) = 1$. Tällaisia lukuja sanotaan keskenään jaottomiksi luvuiksi.

Kuten tunnettua, murtoluvut on ennen + tai – laskua muutettava samannimisiksi. Yhteiseksi nimittäjäksi valitaan tällöin lähes aina…

Määritelmä, pienin yhteinen monikerta/ pienin yhteinen jaettava:
Annettujen lukujen a ja b *pienin yhteinen monikerta*, merkitään $\mathrm{pym}(a,b)$ (pienin yhteinen jaettava, $\mathrm{pyj}(a,b)$) on pienin sellainen positiiviluku, joka on jaollinen sekä a:lla että b:llä.

Huomautus Kuten syt:in tapauksessa, määritelmä voidaan laajentaa kolmelle, neljälle, jne. luvulle.

Annettujen lukujen p.y.m. määritetään jakamalla luvut ensin alkutekijöihin ja muodostamalla sitten **kaikkien alkutekijöiden tulo**. Lisäksi, kunkin alkutekijän lukumääräksi otetaan suurempi niiden lukumääristä a:ssa tai b:ssä. Vaihtoehtoisesti voi laskea lukujen a ja b positiivisia monikertoja, kunnes löytyy yhteinen monikerta (hidasta).

Esimerkki 1 Määritä $\mathrm{pym}(84, 120)$.
Alkutekijöihin jako antaa: $84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$ ja $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$, joten otetaan alkutekijä 2 kolme kertaa (luvussa 120 kolme kertaa) sekä alkutekijät $3, 5$ ja 7 kerran. Saadaan

$$\mathrm{pym}(84, 120) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 840.$$

Esimerkki 2 Määritä $\mathrm{pym}(84{,}120)$ toisella tavalla
Luvun 84 monikerrat ovat:

$$84, \quad 168, \quad 252, \quad 336, \quad 420, \quad 504, \quad 588,$$
$$672, \quad 756, \quad \mathbf{840}, \quad 924, \ldots$$

Ja vastaavasti luvun 120 monikerrat ovat:

$$120, \quad 240, \quad 360, \quad 480, \quad 600, \quad 720, \quad \mathbf{840}, \ldots$$

Esimerkki 3 Määritä $\mathrm{pym}(35, 60, 63)$.
Alkutekijöihin jako antaa: $35 = 5 \cdot 7$, $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ ja $63 = 3^2 \cdot 7$, joten

$$\mathrm{pym}(35, 60, 63) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 1\,260.$$

Esimerkki lisä Lukujen 84 ja 120 tulo on $84 \cdot 120 = 10\,080$. Toisaalta myös $\mathrm{syt}(84{,}120) \cdot \mathrm{pym}(84{,}120) = 10\,080$. Tämä ei ole sattumaa!

Lause, s.y.t.:n ja p.y.m.:n tulo:
Kahden luvun a ja b tulo on sama kuin niiden syt:n ja pym:n tulo

$$ab = \mathrm{syt}(a,b) \cdot \mathrm{pym}(a,b).$$

Lause, s.y.t.:n ja p.y.m.:n tulo:
Kahden luvun a ja b tulo on sama kuin niiden syt:in ja pym:in tulo

$$ab = \mathrm{syt}(a,b) \cdot \mathrm{pym}(a,b).$$

Todistus: Olkoon $d = \mathrm{syt}(a,b)$ ja $e = \mathrm{pym}(a,b)$. Tällöin pätee

$$a = dm, \qquad b = dn, \qquad \text{missä } \mathrm{syt}(m,n) = 1,$$

sillä jos olisi $\mathrm{syt}(m,n) > 1$, niin luvuilla a ja b olisi yhteinen tekijä $ds > d$.
Edelleen havaitaan $\mathrm{pym}(a,b) = e = d \cdot m \cdot n$, koska $\mathrm{syt}(m,n) = 1$.
Näin ollen

$$ab = d \cdot m \cdot d \cdot n = d \cdot (d \cdot m \cdot n) = \mathrm{syt}(a,b) \cdot \mathrm{pym}(a,b).$$

Esimerkki 4 Mitkä ovat ne kaksi 1000:tta suurempaa, positiivista kokonaislukua, joiden suurin yhteinen tekijä on 117 ja pienin yhteinen jaettava on 11 583?
Ratkaisu Olkoot luvut a ja b. Näille pätee $a > 1000$ ja $b > 1000$.
Lisäksi $\mathrm{syt}(a,b) = 117 = 9 \cdot 13 = 3^2 \cdot 13$
$\mathrm{pym}(a,b) = 11\,583 = 11 \cdot 1053 = 11 \cdot 3^2 \cdot 3^2 \cdot 13.$

Ratkaisu(jatkuu)
Molemmista luvuista a ja b pitää siis löytyä tulo $3^2 \cdot 13$. Taulukoidaan eri vaihtoehdot:

a	b	
$3^2 \cdot 13 = 117$	$3^4 \cdot 13 \cdot 11 = 11\,583$	EI
$3^3 \cdot 13 = 351$	$3^3 \cdot 13 \cdot 11 = 3\,861$	EI
$3^4 \cdot 13 = 1\,053$	$3^2 \cdot 13 \cdot 11 = 1\,287$	OK
$3^2 \cdot 13 \cdot 11 = 1\,287$	$3^4 \cdot 13 = 1\,053$	OK
$3^3 \cdot 13 \cdot 11 = 3\,861$	$3^3 \cdot 13 = 351$	EI
$3^4 \cdot 13 \cdot 11 = 11\,583$	$3^2 \cdot 13 = 117$	EI

Havaitaan, että ensimmäiset kolme riviä riittää kirjoittaa, josta nähdään ratkaisu

$$a = 3^4 \cdot 13 = 1\,053, \qquad b = 3^2 \cdot 13 \cdot 11 = 1\,287$$

tai toisinpäin.

LUKUTEORIA JA TODISTAMINEN, MAA11

Suurten lukujen ja binomien jaollisuus

Aiemmin opittiin, että jaettaessa (isokin) luku pienellä jakajalla, eli jollakin luvuista 2,3,4,5,6,7,8,9,10 tai 11, voidaan hyödyntää jaollisuussääntöjä. Vastaavanlaisia sääntöjä voidaan toki luoda myös muillekin pienille luvuille. Tarkastellaan esimerkkien avulla suurten lukujen jaollisuutta.

Esimerkki Osoita jakolaskua suorittamatta, että luku $63\,000\,015$ ei ole jaollinen seitsemällä.

Ratkaisu Kirjoitetaan $63\,000\,015 = 63\,000\,000 + 15$, josta havaitaan, että summan termi $63\,000\,000$ on jaollinen 7:llä, mutta jälkimmäinen termi 15 ei ole. Tämä palautuu siis aiemmin esillä olleeseen tulokseen: Jos $k|a$ ja $k|b$, niin $k|(a+b)$.

Entäpä, kun jakajana on iso luku.

Esimerkki Laske tarkka arvo $100\,012\,023\,045\,031 : 1\,093$.

Esimerkki Laske tarkka arvo $100\,012\,023\,045\,031 : 1\,093$.

Laskin tietysti hoitaa kohtuu pitkälle. Mutta silloin kun ei hoida, niin jakolasku hoidetaan jakokulmassa, kuten ala-asteella tai otetaan isompi lohko (laskimen tarkkuus huomioiden) käyttöön (suositus).

$$
\begin{array}{r|l}
 & 91 \\
\hline
1\,093 & 100\,012\,023\,045\,031 \\
 & 98\,37 \\
 & 1\,642 \\
 & 1\,093 \\
 & 549\,0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|r}
 & 91\,502\,308\,366 \\
\hline
1\,093 & 100\,012\,023\,045\,031 \\
 & 100\,011\,686 \\
 & 337\,045\,031 \\
 & 337\,044\,038 \\
 & 993
\end{array}
$$

Esimerkki Laske tarkka arvo $123\,000\,189 \cdot 876\,123$. Kertolaskussa voidaan jakaa kymmenpotenssiosiin ja kertoa termeittäin, kuten kurssilla 2 polynomien kohdalla, saadaan

$$
\begin{aligned}
123\,000\,189 \cdot 876\,123 &= (123 \cdot 10^6 + 189) \cdot (876 \cdot 10^3 + 123) \\
&= 123 \cdot 10^6 \cdot 876 \cdot 10^3 + 123 \cdot 10^6 \cdot 123 \\
&\quad + 189 \cdot 876 \cdot 10^3 + 189 \cdot 123 \\
&= 107\,748 \cdot 10^9 + 15\,129 \cdot 10^6 \\
&\quad + 165\,564 \cdot 10^3 + 23\,247
\end{aligned}
$$

$$= 107\,748 \cdot 10^6 + 15\,129 \cdot 10^6$$
$$+165\,564 \cdot 10^3 + 23\,247$$

Lasketaan allekkain (kuten s. 71) tai laskimella, saadaan tulokseksi

$$123\,000\,189 \cdot 876\,123 = 107\,763\,294\,587\,247.$$

Polynomeille pätee seuraava lause

Lause, polynomin $\boldsymbol{a^n - b^n}$ jaollisuus:
Polynomi $a^n - b^n$ on jaollinen binomilla $a - b$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$, kun taas polynomi $a^n + b^n$ on jaollinen binomilla $a + b$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$, $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}_+$, eli n pariton luonnollinen luku.

Todistus Harjoitustehtävä.

Kirjan esimerkit 7 ja 8 käsittelevät tapauksia $n = 2, 4$ ja 3. Lauseen todistaminen tehdään induktiolla (työläs), kyseiset esimerkit valaisevat riittävästi(?) asiaa.

Korollaari Edellisestä lauseesta seuraa, kun valitaan $b = 1$, että polynomi $a^{mn} - 1$ on jaollinen binomeilla $a^m - 1$ tai $a^n - 1$, koska $a^{mn} - 1 = (a^m)^n - 1^n = (a^n)^m - 1^m$.

Korollaari (jatkuu) Polynomi $a^{mn} - 1$ on jaollinen molemmilla binomeilla $a^m - 1$ tai $a^n - 1$ mikäli näillä binomeilla ei ole yhteisiä tekijöitä.

Esimerkki 9, sivu 73
Jaa alkutekijöihin **a)** $2^6 - 1$, **b)** $7^5 + 1$ ja **c)** $9^8 - 1$.

a) $2^6 - 1 = (2^3)^2 - 1^2 = (2^3 - 1)(2^3 + 1) = 7 \cdot 9 = 3^2 \cdot 7$

b) $7^5 + 1 = 7^5 + 1^5$ ja nyt 5 on pariton luonnollinen luku, joten $7^5 + 1^5$ on jaollinen luvulla $7 + 1 = 8$. Saadaan

$$7^5 + 1^5 = 8 \cdot 2101 = 2^3 \cdot 11 \cdot 191\,.$$

c)
$$\begin{aligned} 9^8 - 1 = (9^4)^2 - 1^2 &= (9^4 - 1)(9^4 + 1) \\ &= (9^2 - 1)(9^2 + 1)(9^4 + 1) \\ &= (9 - 1)(9 + 1)(9^2 + 1)(9^4 + 1) \\ &= 8 \cdot 10 \cdot 82 \cdot 6562 \\ &= (2^3) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 41) \cdot (2 \cdot 17 \cdot 193) \\ &= 2^6 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 41 \cdot 193 \end{aligned}$$

Esimerkki 10, sivu 74
c) -kohdassa jakavilla binomeilla ei ole yhteisiä tekijöitä.

d) –kohta on neliöön täydentämien