

## PRELIMINÄAREJÄ:

1) Tutkimusmatkailija T oli joutunut ihmissyöjien vangiksi. Maan tavan mukaan kuningas sanoi hänelle: "Saat esittää minulle yhden pyynnön. Jos hyväksyn sen, niin sinut keitetään. Jos taas hylkään sen, niin sinut paistetaan." Mitä T pyysi?  
VAST: "Paistakaa minut."

2) Valehtelijoiden maassa asuu kaksi heimoa: lierot ja kierot. Tiedetään, että lierot valehtelevat aina, kun taas kierot voivat valehdella tai puhua totta. Tutkimusmatkailija kysyy eräältä maan asukkaalta, kumpaan heimoon tämä kuuluu. Voiko hän päätellä oikean vastauksen, jos vastaaja on  
a) liero,      b) kiero?

VAST: a) Voi      b) Ei voi

Lukuteoria ja todistaminen

5.8.2021

**T-315 Osoita induktiolla, että**

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3, \quad \text{kun } n \in \mathbb{Z}_+.$$

**TODISTUS, kohta 1.= perusaskel, kohdat 2.ja3. = induktioaskel:**

**1. Kun  $n = 1$ .** Tällöin  $1^2 = 1 = 1^3$  ja asia selvä.

**2. Kun  $n = k$ .** IND.OL: Oletetaan, että väite on tosi kun  $n = k$ , eli

$$(1 + 2 + 3 + \dots + k)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3.$$

**3. Kun  $n = k + 1$ .** Nyt, muista  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\left( \underbrace{1 + 2 + \dots + k}_{="a"} + \underbrace{k + 1}_{="b"} \right)^2 = \underbrace{(1 + 2 + \dots + k)^2}_{\text{ind.ol.} = 1^3 + 2^3 + \dots + k^3} + 2 \underbrace{(1 + 2 + \dots + k)(k + 1)}_{\text{esim.5.49} = \frac{k(k+1)}{2}} + \underbrace{(k + 1)^2}_{="b^2"}$$

$$\begin{aligned} \text{ind.ol} \rightarrow &= (1^3 + 2^3 + \dots + k^3) + 2 \cdot \frac{k(k+1)}{2} (k+1) + (k+1)^2 \\ &= (1^3 + 2^3 + \dots + k^3) + (k+1)(k(k+1) + (k+1)) \\ &= (1^3 + 2^3 + \dots + k^3) + (k+1)(k^2 + k + k + 1) \\ &= (1^3 + 2^3 + \dots + k^3) + (k+1)(k^2 + 2k + 1) \\ &= (1^3 + 2^3 + \dots + k^3) + (k+1)(k+1)^2 \\ &= (1^3 + 2^3 + \dots + k^3) + (k+1)^3 \\ &= 1^3 + 2^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 \end{aligned}$$

Ja todistus on valmis.

Lukuteoria ja todistaminen



# Lukuteoria ja todistaminen

Kurssi 11, Maa11

## Kurssin yleiset tiedot

- Kurssi 11 (pakollinen):  
Lukuteoria ja todistaminen, Maa11
- Tunnit (56min):  
ma ja ke 10:20 – 11:16,  
ti 9:00 – 10:00 ja to 12:00 – 12:56
- Kurssikirja: JUURI 11, OTAVA
- Luokka/luokat: MA1



Lukuteoria ja todistaminen

5.8.2021

## Opetettavat asiat / keskeiset sisällöt

- konnektiivit ja totuusarvot
- geometrinen todistaminen
- suora, käännteinen ja ristiriitatodistus
- induktiotodistus
- kokonaislukujen jaollisuus ja jakoyhtälö
- Eukleideen algoritmi
- alkuluvut ja Eratostheneen seula
- aritmetiikan peruslause
- kokonaislukujen kongruenssi
- salausteniikat (Ceasar ja RSA)

Lukuteoria ja todistaminen

5.8.2021

## Kurssin tavoitteet

Kurssin tavoitteena on, että opiskelija

- perehtyy logiikan alkeisiin ja tutustuu todistusperiaatteisiin sekä harjoittelee todistamista
- hallitsee lukuteorian peruskäsitteet ja perehtyy alkulukujen ominaisuuksiin
- osaa tutkia kokonaislukujen jaollisuutta jakoyhtälön ja kokonaislukujen kongruenssin avulla
- syventää ymmärrystään lukujonoista ja niiden summista
- osaa käyttää teknisiä apuvälineitä lukujen ominaisuuksien tutkimisessa.

Lukuteoria ja todistaminen

5.8.2021

## Kurssin arviointi

- Loppukoe vain B-osa (abittina) viikolla 22.
- **Pistehyvitys (vähintään 85 % tehty → 4p lisää, vähintään 75 % tehty → 3p lisää, vähintään 65 % tehty → 2p lisää ja vähintään 40 % tehty → 1p lisää), merkinnät dreiveen.**
- Lisäksi aktiivinen tuntityöskentely ja **itsearviointi** (korottavasti) **ei tietokoneharjoituksia**
- **Wilma-merkinnät:** 5 – 10 = suoritettu ko. arvosanalla, 4 = hylätty, K = kurssi keskeytynyt, S = suoritettu, O = kurssi muuten suoritettu, mutta osasuoritus puuttuu tai koe tekemättä.
- Etenemisesteet (2/3-sääntö)

Lukuteoria ja todistaminen

5.8.2021

## Poissaolot & Myöhästymiset

- Poissaolot merkitään wilmaan → selvitys! (autokoulut → vain inssiajo OK yms.)
- Ei poissaoloja!
- Myöhästyminen → koputa ja odota! Jos alle puolet tunnista jäljellä → poissaolo!

Lukuteoria ja todistaminen

5.8.2021

## Kysymyksiä / Muuta ?

- Kurssin nettisivu (pedassa):  
<https://peda.net/sievi/sievinlukio/oppiaineet2/mp/maa11>
- Valitse itsellesi pari, jolta kysyt läksyt ja muut kurssin asiat, jos et pääse tunnille!
- Wilma ensisijainen yhteydenpitokanava ja koulupäivän aikana saa tulla kysymään milloin vaan.
- LUKI-seula ja terveystiedot
- Matikkapaja ja tukiovetus
- Työpäivä (taksvärkkipäivä) ONKO?
- Syksyn YO:t ma 13.9.→
- **Hätäpoistumisreitit**

Lukuteoria ja todistaminen

5.8.2021

Geogebra ja TI

# OPPIKIRJA



Lukuteoria ja todistaminen

5.8.2021