Matematiikan koe, Maa12 – Algoritmit matematiikassa – RATKAISUT **Sievin lukio**

Maanantai 12.11.2018

VASTAA YHTEENSÄ KUUTEEN TEHTÄVÄÄN

---

1. Vain yksi vastaus on oikein. Vastauksia ei tarvitse perustella, mutta saatat joutua laskemaan itsellesi perusteluja.

1.1 Mikä seuraavista väittämistä on epätosi?

- ○ Jos $x - 3$ on polynomin tekijä, niin $x = 3$ on välttämättä polynomin nollakohta.
- ○ Jos polynomilla $P(x)$ on tekijä $x^2 - 1$, se on jaollinen myös binomilla $x - 1$.
- ◉ Polynomi $2x^4 - 3x^3 - 4x + 5$ on jaollinen binomilla $x + 1$.
- ○ Polynomilla $ax^3 + 2x^2 - 8x$ on tekijä $x - 2$, kun $a = 1$.

1.2 Mikä seuraavista väittämistä on tosi?

- ○ Algoritmi tarkoittaa lukujen laskemista allekkain.
- ○ Kolmannen asteen polynomiyhtälöllä on aina kolme reaalista ratkaisua.
- ○ Jos polynomi $P(x)$ on jaollinen sekä polynomilla $x + 2$ että polynomilla $x - 3$, niin $P(x)$ on varmasti jaollinen myös polynomilla $x^2 - 6$.
- ◉ Jos toisen asteen yhtälön diskriminantti on negatiivinen, yhtälöllä on kaksi imaginaarista ratkaisua.

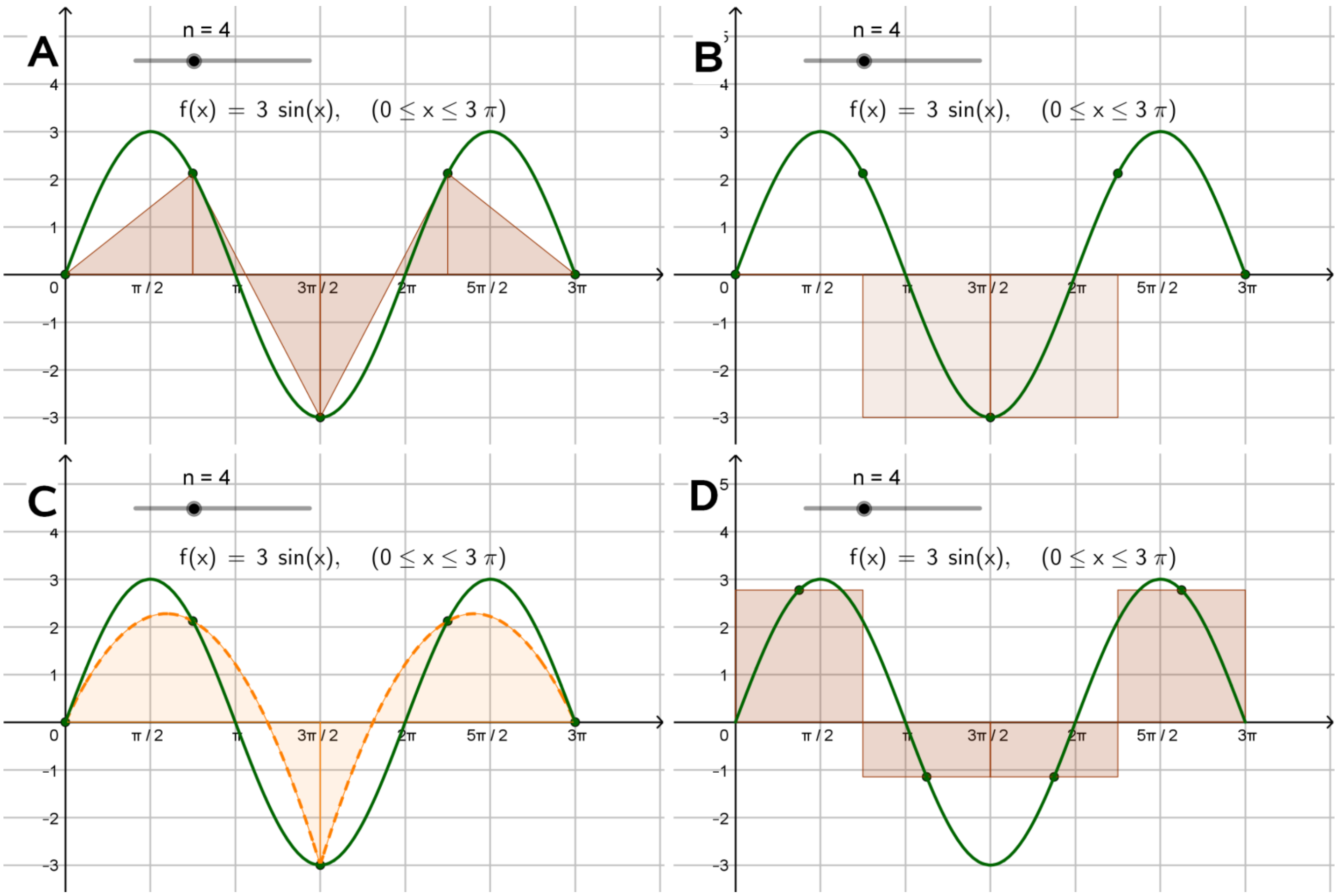
1.3 Mikä seuraavista ei ole virheen määritysmenetelmä?

- ○ "maksimi-minimi" -menetelmä.
- ◉ "virheen puolittaminen" -menetelmä.
- ○ "virheen eteneminen" -menetelmä
- ○ "virhekaavojen käyttö" -menetelmä

1.4 Mikä seuraavista lausekkeista ei ole $f'(0)$?

- ○ $$\lim_{b \to 0} \frac{f(b) - f(0)}{b}$$
- ○ $$\lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h}$$
- ○ $$\lim_{x^2 \to 0} \frac{f(x^2) - f(-x^2)}{2x^2}$$
- ◉ $$\lim_{a \to 0} \frac{f(0) + a - f(0)}{a}$$

1.5 Alla on neljä kuvaa A-D, joissa on funktion $f: f(x) = 3\sin x$ kuvaaja välillä $[0, 3\pi]$ sekä erilaisia muotoja. Kuinka monessa kuvassa A-D muoto ei vastaa minkään numeerisen integroinnin menetelmää?



- 0
- 1
- 2
- 3

1.6 Mikä alla olevista väitteistä on tosi?

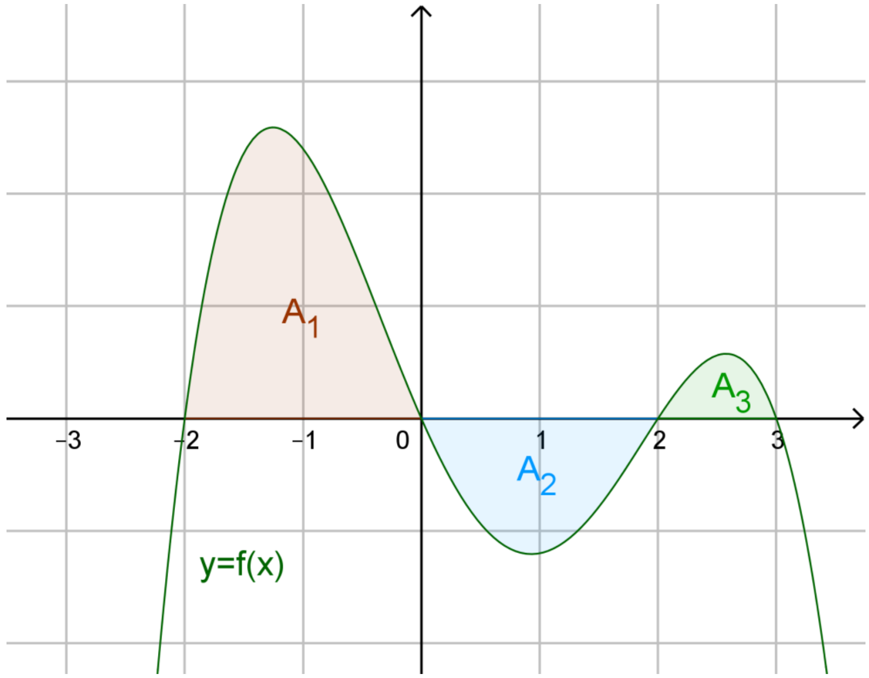
- Jos $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$, niin funktiolla f on nollakohta välillä $]a, [$.
- Jos funktio f on jatkuva välillä $[2{,}3]$ ja $f(2{,}49) = 0{,}49$ ja $f(2{,}46) = -0{,}1$, niin funktiolla f on nollakohta, joka on kokonaisluvun tarkkuudella 2.
- Jos funktio f on vähenevä välillä $x > 0$, niin sillä on täsmälleen yksi nollakohta välillä $x > 0$.
- Jos $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$ ja funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin funktiolla on täsmälleen yksi nollakohta välillä $]a, [$.

1.7 Kuvioon merkityt pinta-alat ovat $A_1 = 4\frac{1}{3}$, $A_2 = 2$ ja $A_3 = \frac{1}{2}$.

Määritä annettujen pinta-alojen ja funktion f kuvaajan avulla lausekkeen

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx - \int_{-2}^{2} |f(x)|\,dx$$

arvo.

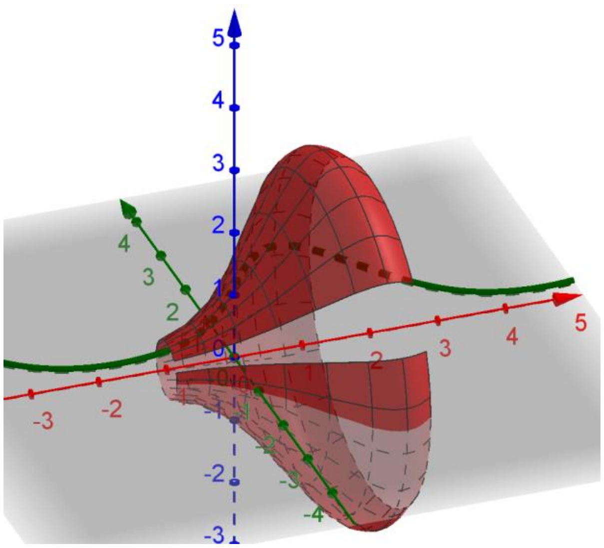


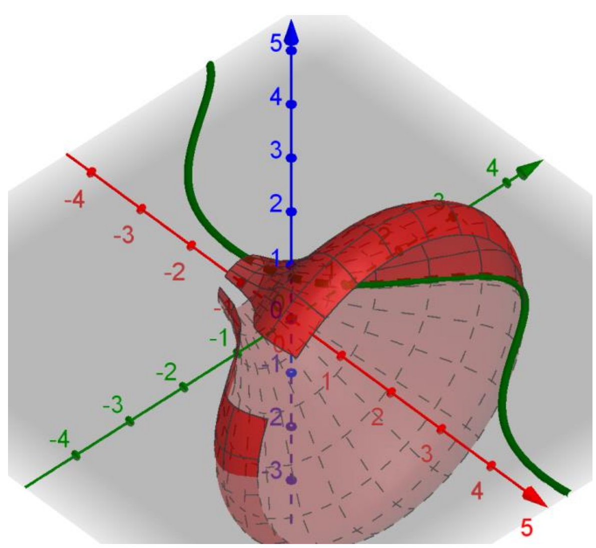
- ○ $\frac{55}{6}$
- ○ $\frac{79}{6}$
- ◉ $-\frac{9}{2}$
- ○ $-\frac{1}{2}$

1.8 Aukaise Aineistot-osiosta *teht1_moniv8.ggb*-tiedosto. Mikä on tilavuuden suhteellinen virhe, kun annetun funktion $f: f(x) = e^{\sin x}$ pyötähtäessä x-akselin ympäri välillä $[-1, 2]$ tilavuutta

$$V = \int_{-1}^{2} \pi \cdot (f(x))^2\,dx$$

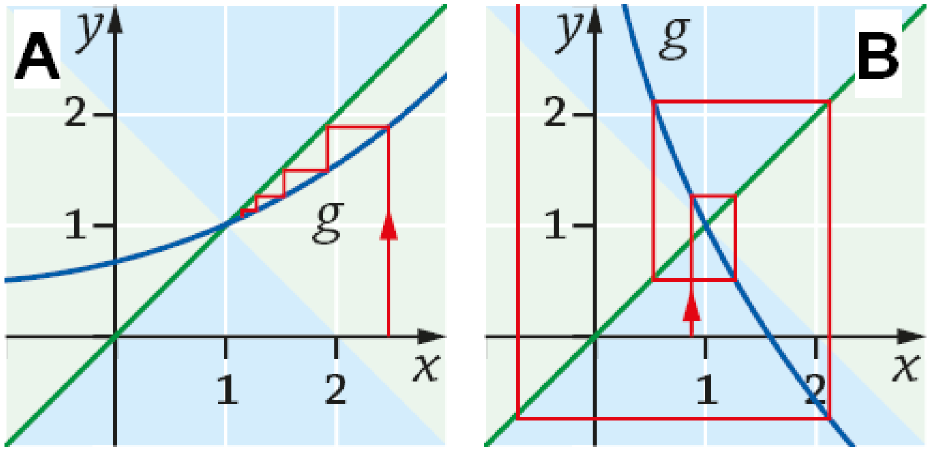
arvioidaan "sisältä"päin 27:llä osavälillä.





- ○ 0.045986064062297
- ◉ 0.047058302573689
- ○ 0.049382142371126
- ○ 0.097639096796036
- ○ 0.08895373450257

1.9 Mitä voidaan sanoa kuvaajien (kuvissa A ja B) perusteella funktion g kiintopistemenetelmän toimivuudesta kohdassa $x = 1$?



- ○ Kiintopistemenetelmä toimii A:ssa ja B:ssä.
- ◉ Kiintopistemenetelmä toimii A:ssa ja ei toimi B:ssä.
- ○ Kiintopistemenetelmä ei toimi A:ssa ja toimii B:ssä.
- ○ Kiintopistemenetelmä ei toimi A:ssa ja ei toimi B:ssä.

1.10 Tiedetään, että yhtälöllä

$$5\tan x - 3 = 10x$$

on yksi juuri välillä $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Kuinka monta iteraatiokierrosta pitää olla, että funktion nollakohdan ylä- ja alalikiarvojen välinen ero on pienempi kuin 10^{-6}. Eli pitää päteä $b - a < 10^{-6}$, missä b on ylälikiarvo ja a on alalikiarvo. Aseta alkualalikiarvoksi $a_{\text{alku}} = -1.5$ ja alkuylälikiarvoksi $b_{\text{alku}} = -1.5$. Hyödynnä Aineistot-osiosta löytyvää *teht1_moniv_10.tns* -tiedostoa. (Muista...kun olet tehnyt tarvittavat muutokset koodiin, niin laskin tilassa kirjoita "haarukointi()" ja sitten CTRL+ENTER)

- ◉ 22
- ○ 7
- ○ 45
- ○ 15

1.11 Mitä kompleksilukua sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n - z}{2^n}$$

näyttäisi lähestyvän, kun $z \approx -1,086 + 1,562i$. Hyödynnä Aineistot-osiosta löytyvää *teht1_moniv_11.ggb* -tiedostoa.

- ○ $-1{,}61 - 2{,}164i$
- ◉ $2{,}685 - 2{,}865i$
- ○ $-1{,}61 + 2{,}164i$
- ○ $2{,}685 + 2{,}865i$

1.12 Montako ratkaisua (mitä tahansa lukua) on yhtälöllä

$$\boldsymbol{x^8 - 1 = 0}\,?$$

- ○ 1
- ○ 2
- ○ 4
- ● 8

2. a) Määritä sellainen vakio k, että polynomi $2x^3 - x^2 + 4x + k$ on jaollinen binomilla

i) $x + 2$, ii) $x^2 + 2$. (4p)

b) Määritä luvun $3 - \sqrt{2}i$ liittoluku ja moduli. (2p)

c) Luvun a oikea arvo on $1{,}0073$. Tutki, kuinka suuri suhteellinen virhe syntyy lausekkeen $\frac{1}{1-a}$ arvoa laskettaessa, kun a pyöristetään luvuksi $1{,}01$. Vertaa lausekkeen arvon $\frac{1}{1-a}$ virhettä muuttujan a virheeseen.(6p)

a) i) Koska jaollinen binomilla $x + 2$, niin tekijälause antaa, $x = -2$ on lausekkeen nollakohta, eli pätee

$$2 \cdot (-2)^3 - (-2)^2 + 4 \cdot (-2) + k = 0 \quad \Longrightarrow \quad k = -28\,.$$

ii) Koska jaollinen binomilla $x^2 + 2$, niin ryhmittelyn kautta saadaan

$$\begin{aligned} 2x^3 - x^2 + 4x + k &= 2x(x^2+2) - x^2 + k \\ &= 2x(x^2+2) - 1(x^2 - k) \\ &= (2x-1)(x^2+2) \end{aligned}$$

Siis, $k = -2$.

b) Luvun $3 - \sqrt{2}i$ liittoluku on $3 + \sqrt{2}i$ ja moduli $\sqrt{3^3 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{11}$.

c) Oikealla arvolla $1{,}0073$ laskettaessa saadaan lausekkeen arvoksi

$$\frac{1}{1 - 1{,}0073} = -\frac{1}{0{,}0073} = -136{,}986\,301\,37 \approx -137\,.$$

Pyöristetyllä likirvolla $1{,}01$ laskettaessa saadaan lausekkeen arvoksi

$$\frac{1}{1 - 1{,}01} = -\frac{1}{0{,}01} = -100\,.$$

Näin ollen lausekkeen $\frac{1}{1-a} =: A$ arvon absoluuttinen virhe on

$$|\Delta A| = |A - A'| = |-100 - (-136{,}986\ldots)| = 36{,}986\ldots \approx 37$$

ja suhteellinen virhe

$$\frac{|\Delta A|}{|A|} = \frac{|A - A'|}{|A|} = \frac{36{,}986\ldots}{136{,}986\ldots} = 26.999\ldots\,\% \approx 27\,\%\,.$$

Muuttujan a arvon absoluuttinen virhe

$$|\Delta a| = |a - a'| = |1{,}0073 - (1{,}01)| = 0{,}0027$$

ja suhteellinen virhe

$$\frac{|\Delta a|}{|a|} = \frac{|a - a'|}{|a|} = \frac{0{,}0027}{1{,}0073} = 0{,}002\,680\,432\,\ldots \approx 0{,}27\,\%.$$

Eli lausekkeen suhteellinen virhe on satakertainen muuttujan suhteelliseen virheeseen nähden. Suhteellinen virhe siis satakertaistuu.

3. a) Ratkaise iteroimalla (Newton tai kiintopiste) yhtälö $2^{-x} - x = 0$ yhdeksän desimaalin tarkkuudella. Hyvödynnä esim. laskimen ANS-toimintoa?

b) Numeerisia integroimismenetelmiä ovat mm.:

i) suorakaidesääntö, ii) puolisuunnikassääntö ja iii) Simpsonin sääntö.

Osoita, alla olevan taulukon tietoja käyttäen, laskemalla (eli laske kaikilla kolmella eri menetelmällä), että Simpsonin sääntö on tehokkain (tarkin), kun arvioitavana on määrätty integraali

$$\int_{-3}^{5} f(x)\,dx\,,$$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$0{,}717$	$2{,}174$	$3{,}680$	$4{,}277$	$4{,}786$	$3{,}331$	$1{,}417$	$1{,}246$	$0{,}828$	$0{,}025$	$0{,}111$

a) Hyödynnetään kiintopistemenetelmää (myös Newtonin menetelmää voisi käyttää, mutta eksponenttifunktion derivoiminen kun kantaluku ei ole Neperin luku tuottaa logaritmeja mukaan… tosin onko väliä), jota varten muokataan yhtälö $2^{-x} - x = 0$ ”sopivaan” muotoon $x = g(x)$, eli

$$x = 2^{-x}.$$

Mistä tämän sopivan muodon voi tietää? Miksei muoto $x = -\frac{\ln x}{\ln 2} = -\frac{1}{\ln 2}\ln x$? Ei mistään muusta kuin kokeilemalla eri vaihtoehtoja tai tutkimalla vastaako lauseke kutistavan funktion lauseketta. Nyt esimerkiksi muoto $x = -\frac{\ln x}{\ln 2} = -\frac{1}{\ln 2}\ln x$ ei tuota tulosta (hajaantuu) koska funktio g: $g(x) = -\frac{1}{\ln 2}\ln x$ ei ole kutistava kohdan $x_0 = 0{,}641\ldots$ ympäristössä (derivaatan itseisarvo on yli 1).

Laskimessa iteraatiokaava saa muodon $x_n = 2^{-\boxed{\text{Ans}}}$. Käytetään alkuarvoa $x_0 = 1$. Taulukoidaan tiedot:

n	x_n	$g(x_n) = 2^{-x_n}$
0.	1	$2^{-1} = 0{,}5$
1.	0,5	$2^{-0{,}5} = 0{,}707\,106\,781\ldots$
2.	0,707 106 …	$2^{-0{,}707\ldots} = 0{,}612\,547\,326\ldots$
3.	0,612 547 …	$\vdots$

⋮	⋮	⋮
10.	0,640 963 …	$2^{-0{,}640\ldots} = 0{,}641\ 284\ 509\ldots$, 3 desimaalia
⋮	⋮	⋮
20.	0,641 185 …	$2^{-0{,}641\ldots} = 0{,}641\ 185\ 774\ldots$, 6 desimaalia
⋮	⋮	⋮
24.	0,618 185 …	$2^{-0{,}641\ldots} = 0{,}641\ 185\ 745\ldots$, 9 desimaalia
25.	0,618 185 …	$2^{-0{,}641\ldots} = 0{,}641\ 185\ 743\ldots$, 8 desimaalia
26.	0,618 185 …	$2^{-0{,}641\ldots} = 0{,}641\ 185\ 744\ldots$, 8 desimaalia
29.	0,618 185 …	$2^{-0{,}641\ldots} \approx 0{,}641\ 185\ 745$, 9 desimaalia
⋮	⋮	⋮

Näin on saatu yhtälön $2^{-x} - x = 0$ ratkaisu määritettyä yhdeksän desimaalin tarkkuudella, tarvittiin 29 iteraatiokierrosta. Huomaa, että vasta 29:s iteraatiokierros tuottaa pyöristys huomioiden halutun tarkkuu-den vaikka jo kierroksella 24 tulee ”oikeat” desimaalit. Pyöristys huomioiden nollakohdaksi tulee siis

$$x_0 \approx 0{,}641\ 185\ 745.$$

TAI

Newton menetelmä: Funktio $f: f(x) = 2^{-x} - x$, jolloin $f'(x) = -\ln 2 \cdot 2^{-x} - 1$ ja laskimessa iteraatiokaava saa muodon

$$x_{n+1} = \boxed{\text{Ans}} - \frac{2^{-\boxed{\text{Ans}}} - \boxed{\text{Ans}}}{-\ln 2 \cdot 2^{-\boxed{\text{Ans}}} - 1}.$$

Koska lisäksi

$$\begin{cases} f(0) = 2^{-0} - 0 = 1 > 0 \\ f(1) = 2^{-1} - 1 = -\dfrac{1}{2} < 0 \end{cases},$$

niin hyvät alkulikiarvot ovat $x_0 = 1$ tai $x_0 = 0$. Taulukointi antaa

n	x_n	$x_{n+1} = \boxed{\text{Ans}} - \frac{2^{-\boxed{\text{Ans}}} - \boxed{\text{Ans}}}{-\ln 2 \cdot 2^{-\boxed{\text{Ans}}} - 1}$
0.	1	0,628 687 207 584
1.	0,628 687 207 584	0,641 169 034 643
2.	0,641 169 034 643	0,641 185 744 475
3.	0,641 185 744 475	0,641 185 744 505
4.	0,641 185 744 505	0,641 185 744 505

Tällöin jo neljäs iteraatiokierros antaa halutun tarkkuuden. Ja

n	x_n	$x_{n+1} = \boxed{\text{Ans}} - \dfrac{2^{-\boxed{\text{Ans}}} - \boxed{\text{Ans}}}{-\ln 2 \cdot 2^{-\boxed{\text{Ans}}} - 1}$
0.	0	0,590 616 109 15
1.	0,590 616 109 15	0,640 909 617 724
2.	0,640 909 617 724	0,641 185 736 374
3.	0,641 185 736 374	0,641 185 744 505
4.	0,641 185 744 505	0,641 185 744 505

Tällöin viides iteraatiokierros antaa halutun tarkkuuden.

b) Suorakaidesääntö. Tasavälinen jako, $\Delta x = 1$ ja lasketaan portaiden korkeudet osavälien **alku**pisteissä:

$$\int_{-3}^{5} f(x)\,dx \overset{\substack{\text{suorakaide–}\\ \text{sääntö}}}{\approx} f(-3)\cdot\Delta x + f(-2)\cdot\Delta x + f(-1)\cdot\Delta x + f(0)\cdot\Delta x + f(1)\cdot\Delta x +$$
$$f(2)\cdot\Delta x + f(3)\cdot\Delta x + f(4)\cdot\Delta x + f(5)\cdot\Delta x$$
$$= 2{,}174\cdot 1 + 3{,}680\cdot 1 + 4{,}277\cdot 1 + 4{,}786\cdot 1 + 3{,}331\cdot 1 + 1{,}417\cdot 1 +$$
$$1{,}246\cdot 1 + 0{,}828\cdot 1 + 0{,}025\cdot 1$$
$$= 21{,}764$$

Suorakaidesääntö.Tasavälinen jako, $\Delta x = 1$ ja lasketaan portaiden korkeudet osavälien **loppu**pisteissä:

$$\int_{-3}^{5} f(x)\,dx \overset{\substack{\text{suorakaide–}\\ \text{sääntö}}}{\approx} f(-2)\cdot\Delta x + f(-1)\cdot\Delta x + f(0)\cdot\Delta x + f(1)\cdot\Delta x + f(2)\cdot\Delta x +$$
$$f(3)\cdot\Delta x + f(4)\cdot\Delta x + f(5)\cdot\Delta x + f(6)\cdot\Delta x$$
$$= 3{,}680\cdot 1 + 4{,}277\cdot 1 + 4{,}786\cdot 1 + 3{,}331\cdot 1 + 1{,}417\cdot 1 + 1{,}246\cdot 1 +$$
$$0{,}828\cdot 1 + 0{,}025\cdot 1 + 0{,}111\cdot 1$$
$$= 19{,}701$$

Puolisuunnikassääntö. Tasavälinen jako, $\Delta x = h = 1$:

$$\int_{-3}^{5} f(x)\,dx \overset{\substack{\text{puolis.–}\\ \text{sääntö}}}{\approx} h\left[\frac{1}{2}\cdot f(-3) + f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \frac{1}{2}\cdot f(5)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2{,}174 + 3{,}680 + 4{,}277 + 4{,}786 + 3{,}331 + 1{,}417 + 1{,}246 + 0{,}828 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}025$$
$$= 20{,}6645$$

Simpsonin sääntö. Tasavälinen jako, $\Delta x = h = 1$:

$$\int_{-3}^{5} f(x)\,dx \overset{\text{Simp.–}\atop\text{sääntö}}{\approx} \frac{h}{3}[f(-3) + 4\cdot f(-2) + 2\cdot f(-1) + 4\cdot f(0) + 2\cdot f(1) + 4\cdot f(2) + 2\cdot f(3) + 4\cdot f(4) + f(5)]$$

$$= \frac{1}{3}[2{,}174 + 4\cdot 3{,}680 + 2\cdot 4{,}277 + 4\cdot 4{,}786 + 2\cdot 3{,}331 + 4\cdot 1{,}417 + 2\cdot 1{,}246 + 4\cdot 0{,}828 + 0{,}025]$$

$$= 20{,}917$$

Koska tarkka arvo on 21, niin Simpsonin sääntö antoi tarkimman likiarvon $20{,}917$.

Suhteelliset virheet (ei pyydetty):

Suorakaidesääntö 1:

$$\frac{|\Delta f|}{|f|} = \frac{|f - f'|}{|f|} = \frac{|21 - 21{,}764|}{|21|} = \frac{0{,}764}{21} = 0{,}036\ 380 \ldots \approx\ 3{,}64\ \%\,.$$

Suorakaidesääntö 2:

$$\frac{|\Delta f|}{|f|} = \frac{|f - f'|}{|f|} = \frac{|21 - 19{,}701|}{|21|} = \frac{1{,}299}{21} = 0{,}061\ 857 \ldots \approx\ 6{,}19\ \%\,.$$

Puolisuunnikassääntö:

$$\frac{|\Delta f|}{|f|} = \frac{|f - f'|}{|f|} = \frac{|21 - 20{,}6645|}{|21|} = \frac{0{,}3355}{21} = 0{,}015\ 976 \ldots \approx\ 1{,}60\ \%\,.$$

Simpsonin sääntö:

$$\frac{|\Delta f|}{|f|} = \frac{|f - f'|}{|f|} = \frac{|21 - 20{,}917|}{|21|} = \frac{0{,}083}{21} = 0{,}003\ 952 \ldots \approx\ 0{,}40\ \%\,.$$

Simpsonin sääntö tuottaa pienimmän suhteellisen virheen, OK.

4. Olkoon $\boldsymbol{f}\colon \boldsymbol{f(x) = x^{\sqrt[3]{x}}}$. Laske suhteellinen virhe, kun $\boldsymbol{f'(5)}$ lasketaan (tarkka arvo → laske laskimella)

a) erotusosamäärällä kohdasta 5 kohtaan $\boldsymbol{5{,}001}$,

b) keskeiserotusosamäärällä (keskeisdifferenssillä)

$$\frac{\boldsymbol{f(5+h) - f(5-h)}}{\boldsymbol{2h}}, \qquad \textbf{kun } \boldsymbol{h = 0{,}001}.$$

c) Osoita, että derivaatta on keskeiserotusosamäärän raja-arvo, kun $\boldsymbol{h \to 0}$. Eli, jos funktio on derivoituva kohdassa $\boldsymbol{x}$, niin osoita, että pätee

$$\lim_{h\to 0} \frac{\boldsymbol{f(x+h) - f(x-h)}}{\boldsymbol{2h}} = \boldsymbol{f'(x)}.$$

Aluksi: Funktio f on potenssifunktiona määritelty, kun $x > 0$, koska muuttuja x myös eksponentissa.

Derivaatan tarkka arvo, kun $Df(x) = Dx^{\sqrt[3]{x}} \overset{\text{TI–}n\text{spire}}{\triangleq} \left(\frac{\ln x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)\cdot x^{\sqrt[3]{x}}$, kohdassa $x = 5$ on

$$f'(5) = \left(\frac{\ln 5}{3 \cdot \sqrt[3]{5^2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{5^2}}\right) \cdot 5^{\sqrt[3]{5}} = 8{,}236\,991\,291\,04\ \ldots \approx 8{,}237\,.$$

a) Erotusosamääräksi $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ saadaan annetuilla arvoilla $x = 5$ ja $h = 0{,}001$

$$\frac{f(5{,}001) - f(5)}{0{,}001} = \frac{5{,}001^{\sqrt[3]{5{,}001}} - 5^{\sqrt[3]{5}}}{0{,}001} \approx 8{,}238\,785\,214\,.$$

Suhteellinen virhe on näin ollen

$$\frac{|f'(5) - 8{,}238\,785\,214|}{|f'(5)|} = \frac{|8{,}236\,991\,291\ \ldots - 8{,}238\,785\,214|}{|8{,}236\,991\,291\ \ldots|} = 0{,}000\,217\,788\ \ldots \approx 0{,}022\,\%\,.$$

b) Keskeiserotusosamääräksi $\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}$ saadaan annetuilla arvoilla $x = 5$ ja $h = 0{,}001$

$$\frac{f(5{,}001) - f(4{,}999)}{2 \cdot 0{,}001} = \frac{5{,}001^{\sqrt[3]{5{,}001}} - 4{,}999^{\sqrt[3]{4{,}999}}}{0{,}002} \approx 8{,}236\,991\,509\,.$$

Suhteellinen virhe on näin ollen

$$\frac{|f'(5) - 8{,}236\,991\,509|}{|f'(5)|} = \frac{|8{,}236\,991\,291\ \ldots - 8{,}236\,991\,509|}{|8{,}236\,991\,291\ \ldots|} \approx 0{,}000\,000\,026\,461\ \ldots,$$

mikä vastaa prosentteina noin 0,000 002 6 %.

c) Raja-arvon laskuominaisuuksien (7.-kurssi) ja derivaatan määritelmän mukaan

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\overbrace{-f(x)+f(x)}^{+0}-f(x-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-\big(-f(x)\big)-f(x-h)}{2h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{2h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{2h} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{h} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \\
&= \frac{1}{2}\cdot f'(x) + \frac{1}{2}\cdot f'(x) \\
&= f'(x).
\end{aligned}$$

Ja asia selvä.

5. Arvioi numeerisesti välillä $[-2, 2]$ käyrien $y_1 = e^x$ ja $y_2 = 0{,}5 \cdot e^{(x^2)} - 2^x + 2$ rajaaman kolmiosaisen alueen pinta-alaa seitsemän desimaalin tarkkuudella käyttäen 150 osaväliä ja

i) puolisuunnikassääntöä,

ii) Simpsonin sääntöä.

Piirrä Geogebralla kuva tilanteessa, riittää välillä $[-2, 2]$.

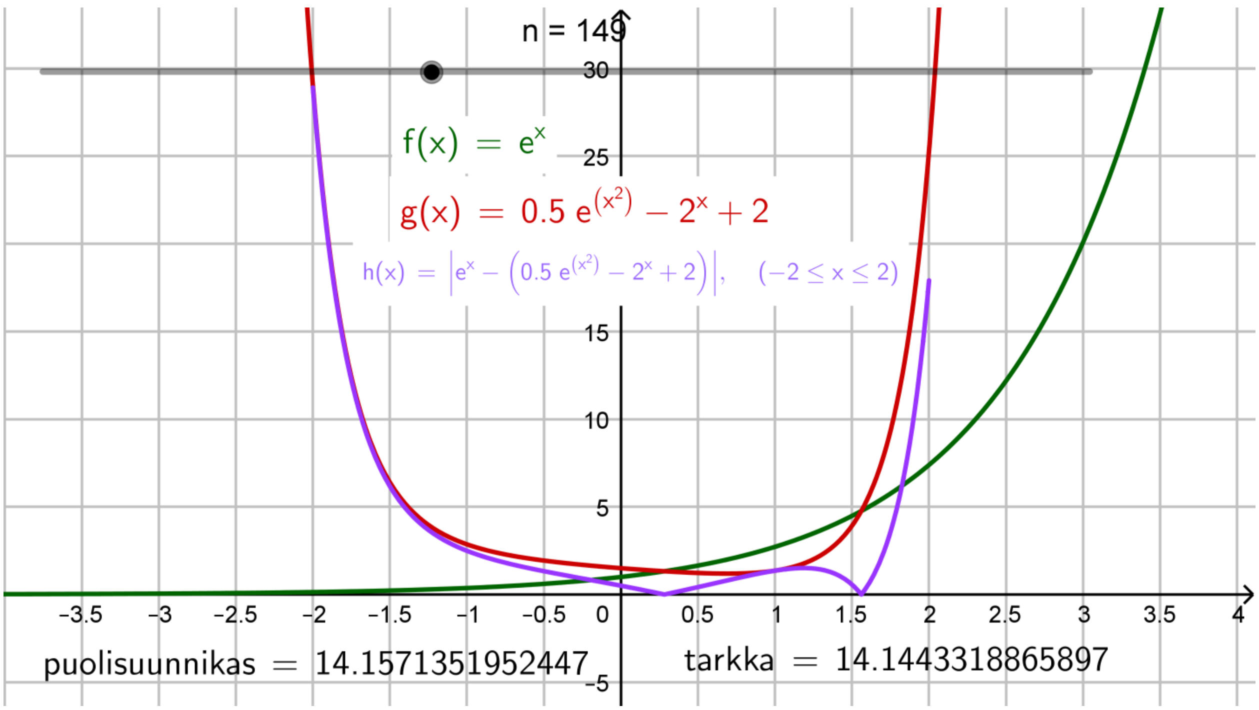
iii) Määritä tarkka arvo integraalille

$$\int_{-2}^{2} |y_2 - y_2|\, dx\,.$$

Kuinka monta osaväliä puolisuunnikasarvioon pitää valita, jotta kaksi ensimmäistä desimaalia tarkasta arvosta ovat oikeita?

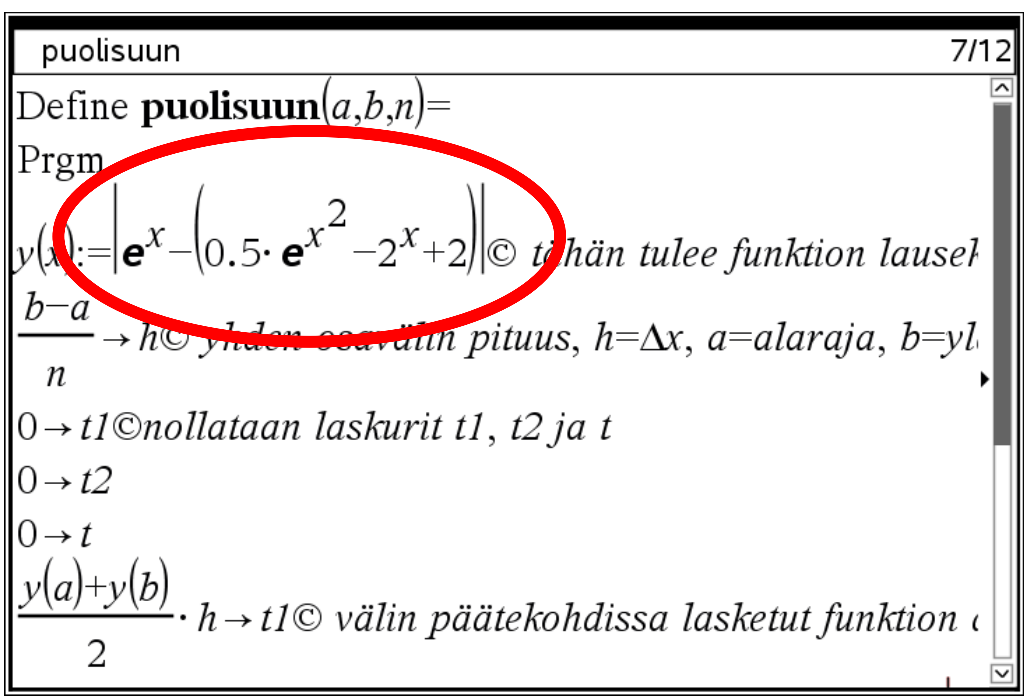
Piirretään Geogebralla tilanteesta kuva (funktioiden kuvaajat ja funktioiden erotusfunktion itseisarvo)

MUISTA PINTA-ALA EI VOI OLLA NEGATIIVISTA!



Määritetään TI-ohjelmalla puolisuunnikas ja simpsoninsääntö koodilla arviot kun osavälejä on 150.

Puolisuun:

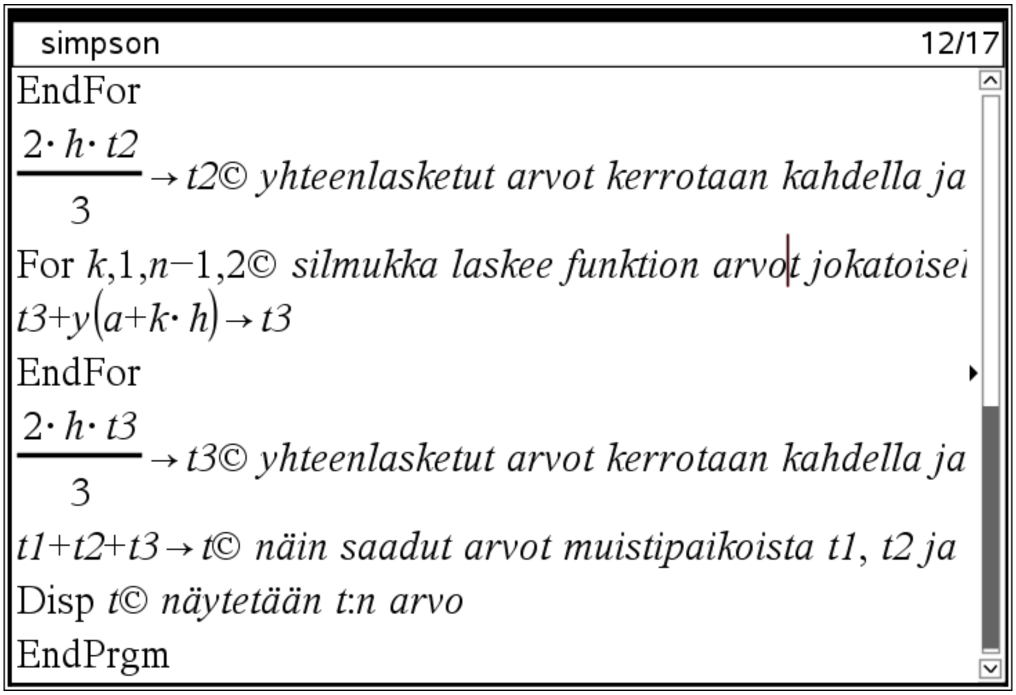


```
puolisuun                                                          2/12
0→t2
0→t
(y(a)+y(b))/2 · h→t1© välin päätekohdissa lasketut funktion
For k,1,n−1,1© silmukka laskee funktion arvot osaväleili
t2+y(a+k· h)→t2
EndFor
t2· h→t2© kerrotaan summatut funktion arvot osavälin h
t1+t2→t© lasketaan yhteen muistipaikat t1 ja t2
Disp t© näytetään t:n arvo
EndPrgm
```

```
puolisuun(⁻2,2,150
                                                     14.1574364042
                                                            Valmis
```

Ja Simpson:

```
simpson                                                            3/17
Define simpson(a,b,n)=
Prgm
y(x):=|e^x−(0.5· e^(x^2) −2^x+2)|© tähän tulee funktion lausek
(b−a)/n→h© yhden osavälin pituus, h=Δx, a=alaraja, b=ylä
0→t1©nollataan laskurit t1, t2, t3 ja t
0→t2
0→t3
0→t
((y(a)+y(b))· h)/3→t1© välin päätekohdissa lasketut funktion
For k,1,n−1,1© silmukka laskee funktion arvot osaväleili
t2+y(a+k· h)→t2
EndFor
(2· h· t2)/3→t2© yhteenlasketut arvot kerrotaan kahdella ja
```



simpson 12/17

EndFor

$\frac{2\cdot h\cdot t2}{3} \rightarrow t2$© yhteenlasketut arvot kerrotaan kahdella ja

For k,1,n−1,2© silmukka laskee funktion arvot jokatoisei

$t3+y(a+k\cdot h) \rightarrow t3$

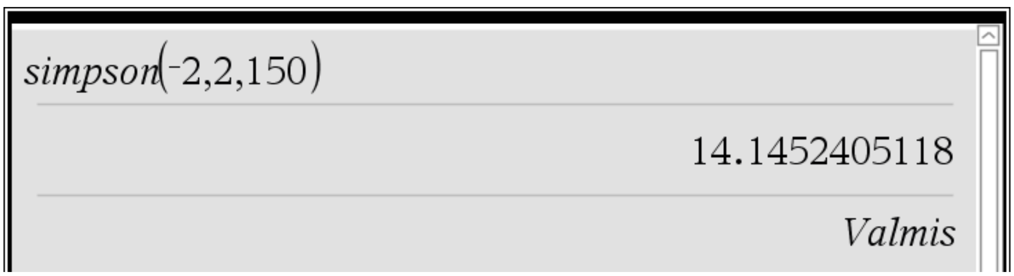
EndFor

$\frac{2\cdot h\cdot t3}{3} \rightarrow t3$© yhteenlasketut arvot kerrotaan kahdella ja

$t1+t2+t3 \rightarrow t$© näin saadut arvot muistipaikoista t1, t2 ja

Disp t© näytetään t:n arvo

EndPrgm

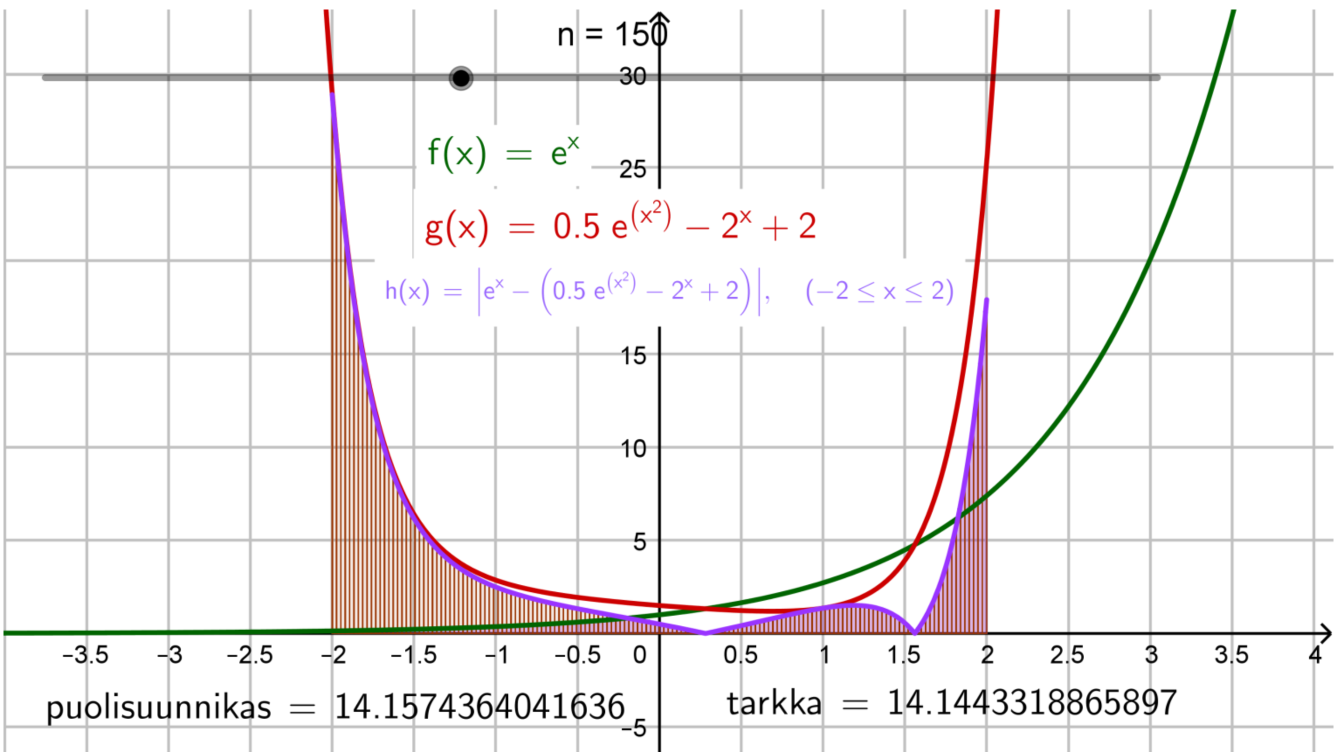


$simpson(^-2,2,150)$

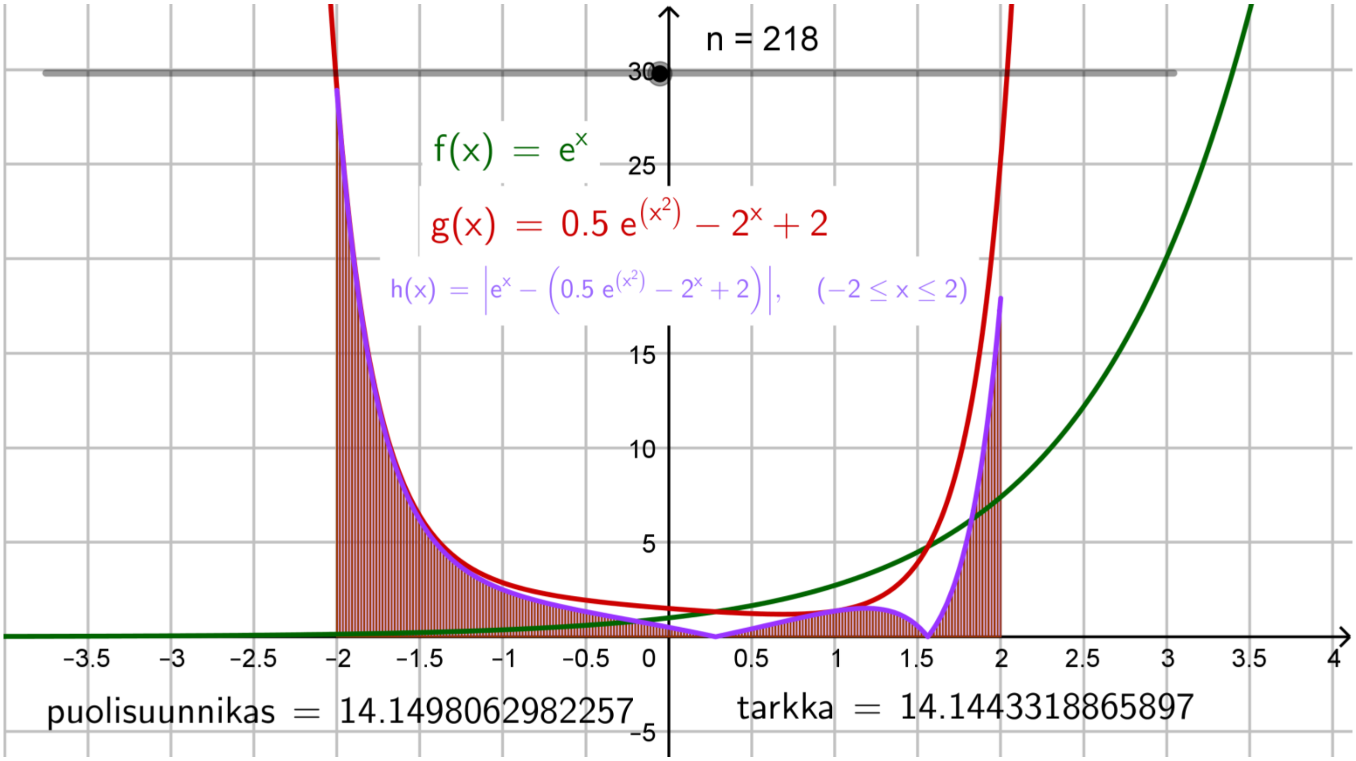
14.1452405118

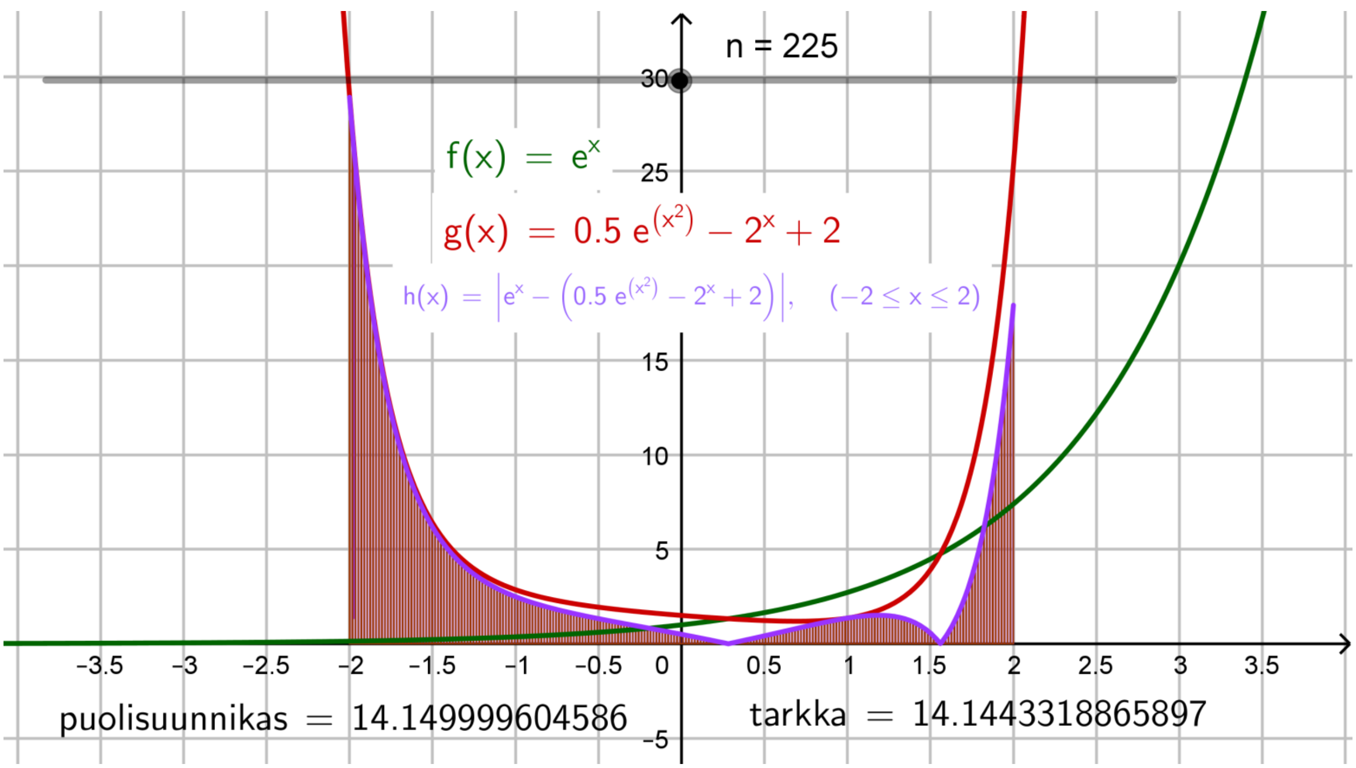
Valmis

Siis puolisuunnikas antaa 14.1574364042 ja Simpson antaa 14.1452405118.



Jotta saadaan kaksi desimaalia oikein, niin tulee ottaa vähintään 225 osaväliä (hyväksytään myös 218).





6. a) Jaa polynomi $x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6$ binomilla $x - 3$ käyttäen jakokulmaa (Fysiikanpiirto3.2 -työkalu pitäisi löytyä TI:n widgetistä).(5p)

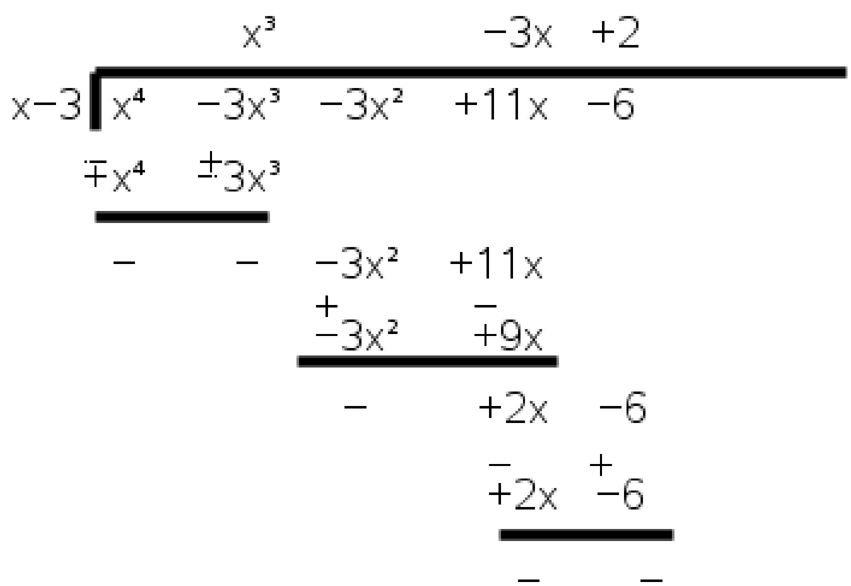
b) Osoita, että yhtälöllä

$$\boldsymbol{x = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1}$$

on ratkaisu välillä $]1,2[$. Selvitä tämä ratkaisu kiintopistemenetelmällä seitsemän desimaalin tarkkuudella. (5p)

c) Selitä mitä algoritmi tarkoittaa? Voit selittää myös esimerkein. (2p)

a) Saadaan jako menemään tasan (tämäpä yllätys ☺)



b) Tarkastellaan yhtälöstä saatavaa funktiota $f\colon f(x) = x - \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$ (TAI $f\colon f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - x + 1$)

Funktio f on jatkuva ja derivoituva kaikkialla, erityisesti jatkuva välillä $[1,2]$ ja derivoituva välillä $]1,2[$.

Koska

$$f(1) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f(2) = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = +\frac{3}{4} > 0$$

niin Bolzanon lauseen nojalla funktiolla f on **ainakin** yksi nollakohta välillä $]1,2[$.

Lisäksi

$$f'(x) = 1 - \ln\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x = 1 + \ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

→funktio f on aidosti kasvava (monotoninen), eli **korkeintaan** yksi nollakohta välillä $]1,2[$.

∴ funktiolla f on **täsmälleen** yksi nollakohta välillä $]1,2[$ ja yhtälöllä yksi juuri = ratkaisu.

Likiarvoksi saadaan TI-ohjelmistolla

```
kiintopiste                                                        0/11
Define kiintopiste()=
Prgm
3/2 → x© alkuarvo ja iterointikierrosten pienempi arvo
(1/2)^(3/2) +1 → y©iteraation eka kierros tai iterointikierrosten
0 → n©kierroslaskurin nollaus
While |x−y|>1·10^-9©ehto tässä pitää olla itseisarvot
n+1 → n©kierroslaskurin lisäys
```

```
kiintopiste                                                        0/11
n+1 → n©kierroslaskurin lisäys
(1/2)^x +1 → x©kasvatetaan iterointikieerosten pienempää a
(1/2)^y +1 → y©kasvatetaan iterointikierrosten jälkimmäistä
EndWhile
Disp x
Disp y
Disp n
EndPrgm
```

```
kiintopiste()
                                                        1.38333234772
                                                        1.38333234805
                                                        15.
                                                        Valmis
```

7. a) Olkoon $z = -5 + 2i$. Ilmoita kompleksiluku $w = 2z - 3$ napakoordinaatti- eli polaarimuodossa ja laske kolmas potenssi. VIHJE: Hyödynnä laskinta ja tarkista laskimella.

b) Ratkaise yhtälö $z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$.

c) Laske $\sqrt{-2-5i}$. Perustele, laskin ei riitä.

a) Aluksi lasketaan kompleksiluku w, saadaan

$$w = 2z - 3 = 2(-5 + 2i) - 3 = -13 + 4i\,.$$

Lasketaan luvun w moduli, eli kompleksiluvun w itseisarvo, josta saadaan etäisyys, merkitään r ja hyödyntämällä tangenttia saadaan vaihekulma, merkitään θ, määritettyä. Huomataan, että tangentin ominaisuudet huomioiden onkin otettava $\theta - 180°$. Syy: 9.-kurssi ja se, että x-koordinaatti on negatiivinen → vaihekulma yli 90 astetta jne. Siis

$$|w| = \sqrt{(-13)^2 + 4^2} = \sqrt{169 + 16} = \sqrt{185},$$

$$\tan(\theta - 180°) = \frac{4}{-13} \quad \Longrightarrow \quad \theta - 180° = -17{,}102\ldots° \approx -17{,}1° \quad \Longrightarrow \quad \theta = 162{,}897\ldots° \approx 162{,}9°$$

$$\Longrightarrow \quad w = -13 + 4i \approx \sqrt{185} \cdot (\cos(162{,}9°) + i \cdot \sin(162{,}9°)).$$

Nyt voidaan hyödyntää polaarimuotoa potenssin laskemisessa. Eli pituus normaalisti potenssiin ja kulma kerrotaan kolmella:

$$\begin{aligned}
u = w^3 &\approx \left(\sqrt{185} \cdot (\cos(162{,}9°) + i \cdot \sin(162{,}9°))\right)^3 = \sqrt{185}^3 \cdot (\cos(162{,}9°) + i \cdot \sin(162{,}9°))^3 \\
&= 185\sqrt{185} \cdot \left[\cos\left(3 \cdot (162{,}9°)\right) + i \cdot \sin\left(3 \cdot (162{,}9°)\right)\right] \\
&= 185\sqrt{185} \cdot (\cos(488{,}7°) + i \cdot \sin(488{,}7°)) \\
&= 185\sqrt{185} \cdot (\cos(128{,}7°) + i \cdot \sin(128{,}7°)) \\
&= -1573 + i \cdot 1964
\end{aligned}$$

TAI

$$\begin{aligned}
u = w^3 = (-13 + 4i)^3 &= (-13 + 4i)(-13 + 4i)(-13 + 4i) \\
&= (169 - 52i - 52i - 16)(-13 + 4i) \\
&= (153 - 104i)(-13 + 4i) \\
&= -1989 + 612i + 1352i + 416 \\
&= -1573 + 1964i
\end{aligned}$$

b) TAPA 1:

$$z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z^2(z + 2) + 1(z + 2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (z^2 + 1)(z + 2) = 0$$

$$\left(z^2 - (-1)\right)(z + 2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (z^2 - i^2)(z + 2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (z - i)(z + i)(z + 2) = 0$$

Eli yhtälön $z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$ juuret ovat $z = i$, $z = -i$ ja $z = -2$.

TAPA 2: Tehdään sijoitus $z = x + iy$:

$$z^3+2z^2+z+2=0 \quad \Longrightarrow \quad (x+iy)^3+2\cdot(x+iy)^2+(x+iy)+2=0$$
$$\Longrightarrow \quad (x^3+3x^2yi-3xy-y^3i)+2\cdot(x^2+2xyi-y^2)+(x+iy)+2=0$$
$$\Longrightarrow \quad \underbrace{(x^3-3xy+2x^2-2y^2+x+2)}_{=\text{reaaliosa}}+\underbrace{(3x^2y-y^3+4xy+y)}_{=\text{imaginaariosa}}i=0$$

Tämä toteutuu, kun sekä reaaliosa että imaginaariosa on nolla, ratkaistaan muodostuva yhtälöpari

$$\begin{cases} x^3-3xy+2x^2-2y^2+x+2=0 \\ 3x^2y-y^3+4xy+y=0 \end{cases} \overset{\text{laskin tai "paljon laskemista"}}{\Longrightarrow} \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \text{ tai } \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases}.$$

c) TAPA 1: Muutetaan aluksi $-2-5i$ polaarimuotoon (kts. myös **a)**-kohta)

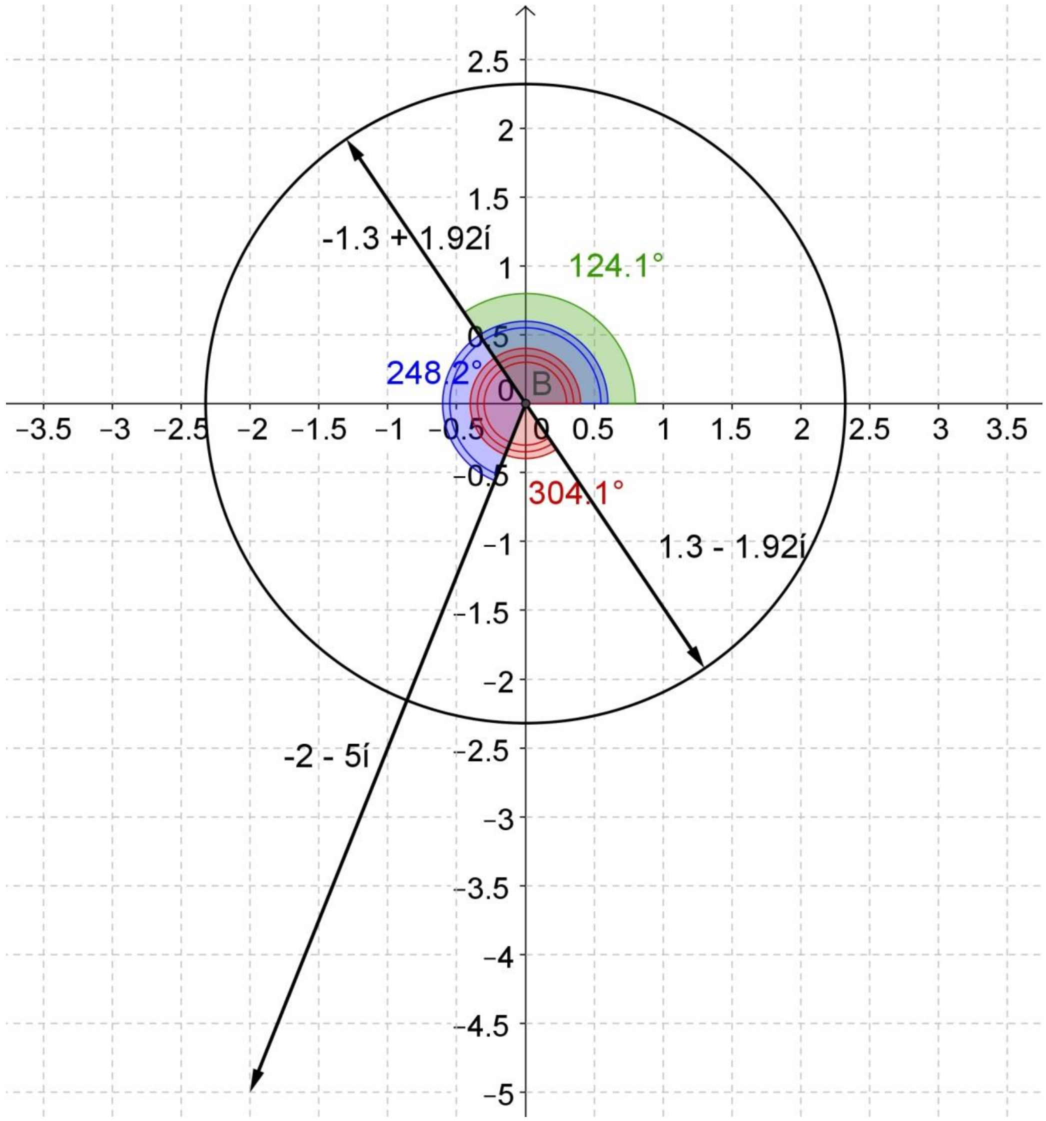
$$z=-2-5i=\sqrt{29}(\cos(248{,}2°)+i\cdot\sin(248{,}2°)).$$

Näin ollen

$$\sqrt{-2-5i}=\sqrt[4]{29}(\cos(248{,}2°)+i\cdot\sin(248{,}2°))^{\frac{1}{2}}$$
$$=\begin{cases} \sqrt[4]{29}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\cdot 248{,}2°\right)+i\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot 248{,}2°\right)\right), \\ \sqrt[4]{29}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\cdot 248{,}2°+180°\right)+i\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot 248{,}2°+180°\right)\right) \end{cases}$$
$$=\begin{cases} \sqrt[4]{29}(\cos(124{,}099\ldots°)+i\cdot\sin(124{,}099\ldots°)) \\ \sqrt[4]{29}(\cos(304{,}099\ldots°)+i\cdot\sin(304{,}099\ldots°)) \end{cases} \textbf{ tai } = \begin{cases} -1{,}300\,992\ldots+i\cdot 1{,}921\,609\ldots \\ 1{,}300\,992\ldots-i\cdot 1{,}921\,609\ldots \end{cases}$$

Tarkistus

$$\begin{cases} (-1{,}300\,992\ldots+i\cdot 1{,}921\,609\ldots)^2 \overset{\text{laskin}}{=} -2-5i, \qquad \text{OK} \\ (1{,}300\,992\ldots-i\cdot 1{,}921\,609\ldots)^2 \underbrace{=}_{\text{laskin}} -2-5i, \qquad \text{OK} \end{cases}$$



TAPA 2: Käytetään kaavaa

$$\sqrt{z}=\sqrt{x+iy}=\pm\left(\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}+i\,\frac{y}{|y|}\sqrt{\frac{-x+\sqrt{x^2+y^2}}{2}}\right).$$

Saadaan:

$$\sqrt{z}=\sqrt{-2-5i}=\pm\left(\sqrt{\frac{-2+\sqrt{(-2)^2+(-5)^2}}{2}}+i\,\frac{-5}{|-5|}\sqrt{\frac{-(-2)+\sqrt{(-2)^2+(-5)^2}}{2}}\right)$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{-2+\sqrt{29}}{2}}-i\sqrt{\frac{2+\sqrt{29}}{2}}\right)=\pm\left(\sqrt{-1+\frac{\sqrt{29}}{2}}-i\sqrt{1+\frac{\sqrt{29}}{2}}\right)$$

$$=\begin{cases}1{,}300\ldots-1{,}921\ldots\cdot i\\-1{,}300\ldots+1{,}921\ldots\cdot i\end{cases}.$$