Toistokoe ja binomitodennäköisyys

Toistokokeen yksittäiset vaiheet ovat samoja eivätkä riipu toisistaan.

Esimerkki: Vakioveikkaus- ja noppaesimerkit olivat toistokokeita.

Toistokoemenetelmässä hyödynnetään usein komplementtien todennäköisyyksiä. Olkoon A jokin tapahtuma. Vaihe suoritetaan $n \in \boldsymbol{N}$ kertaa. Mikä on todennäköisyys, että tapahtuma A ei tapahdu kertaakaan.

$$P(A \text{ ei kertaakaan}) = P(\bar{A})^n.$$

Mikä on todennäköisyys, että tapahtuma A tapahtuu ainakin kerran.

$$P(A \text{ ainakin kerran}) = 1 - P(\bar{A})^n.$$

Esimerkki, (Kreivi de Mérén noppapelit):
a) Noppaa heitetään 4 kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan ainakin yksi kutonen? Kahta noppaa heitetään 24 kertaa. Millä todennäköisyydellä saadaan ainakin yksi kutospari?

a) Tapahtuman A = ”Saadaan kutonen” komplementtitapahtuman $\bar{A}$ = ”Ei saada kutosta” todennäköisyys on $\frac{5}{6}$. Heitot muodostavat toistokoesarjan eikä edellisen/edellisten heiton tulos vaikuta seuraavaan heittoon. Näin ollen komplementtisäännön perusteella

$$\begin{aligned} P(\text{"Ainakin yksi kutonen"}) &= 1 - P(\text{"Ei yhtään kutosta"}) \\ &= 1 - \left(\tfrac{5}{6}\right)^4 \approx 0{,}518 \end{aligned}$$

b) Vastaavasti komplementtisäännön perusteella

$$\begin{aligned} P(\text{"Ainakin yksi kutospari"}) &= 1 - P(\text{"Ei yhtään kutosparia"}) \\ &= 1 - \left(\tfrac{35}{36}\right)^4 \approx 0{,}491 \end{aligned}$$

Binomitodennäköisyyden kaava

Esimerkki:

Oletetaan, että koripalloilijan vapaaheitto onnistuu 0,80 todennäköisyydellä. Mikä on todennäköisyys, että viidestä heitosta täsmälleen kolme onnistuu?

Kyseessä on viisivaiheinen toistokoe. Todennäköisyydet yhden vaiheen tuloksille A = ”heitto onnistuu” ja $\bar{A}$ = ”heitto ei onnistu” ovat $P(A) = 0{,}8$ ja $P(\bar{A}) = 0{,}2$. Saadaan eri mahdollisuuksia → taulukoidaan vaihtoehdot, tulokset ja todennäköisyydet.

Onnistuneiden heittojen nro.:t	Tulos	Todennäköisyys	Onnistuneiden heittojen nro.:t	Tulos	Todennäköisyys
1,2,3	●●●○○	$0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$	2,3,4	○●●●○	$0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$
1,2,4	●●○●○	$0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$	2,3,5	○●●○●	$0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$
1,2,5	●●○○●	$0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$	2,4,5	○●○●●	$0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$
1,3,4	●○●●○	$0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$	3,4,5	○○●●●	$0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$
1,3,5	●○●○●	$0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$	Yht. $\binom{5}{3} = 10$		$\binom{5}{3} \cdot 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$
1,4,5	●○○●●	$0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2$			

Vastaavalla tavalla esimerkin päättelyä hyödyntäen voidaan osoittaa seuraava yleinen tulos.

Lause, *binomitodennäköisyys*:

Jos tapahtuma A tapahtuu n-vaiheisen toistokokeen yksittäisessä vaiheessa todennäköisyydellä $P(A) = p$, jolloin komplementtitapahtuman $\bar{A}$ todennäköisyys on $P(\bar{A}) = q = 1 - p$, niin tällöin

$$P(A \text{ tapahtuu täsmälleen } k \text{ kertaa}) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

missä $0 \leq k \leq n$.