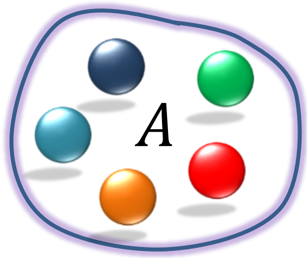
Kombinaatio, k-kombinaatio

Esimerkki 1:
Sinulla on 5 erilaista palloa. Kuinka monta erilaista kahden pallon paria voit muodostaa, kun valintajärjestykseen
a) kiinnitetään huomiota, b) ei kiinnitetä huomiota?



$$\frac{5!}{2!\,(5-2)!} = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$$

a) Yhteensä: $5 \cdot 4 = 20$ (eli permutaatiot)
b) Yhteensä: $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ (vaatii hieman perusteluja)

Määritelmä, kombinaatio eli *k-kombinaatio*:
Äärellisen joukon *kombinaatio* eli *k-kombinaatio* on tämän joukon k-alkioinen <u>*osajoukko*</u>. Eli joukko, jossa on *k* kappaletta alkioita.

Huomautus:
Kombinaatiossa kyse on joukosta, tällöin alkioiden *järjestyksellä* <u>*ei*</u> *ole väliä*. Vertaa permutaatioihin (jonoihin), joissa järjestyksellä oli väliä!

Esimerkki:
Olkoon äärellinen joukko $A = \{a, c, f, t, h, n, u, w, d\}$, jolloin mm. seuraavat joukot ovat joukon A 3-kombinaatioita. Huomaa merkintäerot permutaatioihin (jonoihin).

$$A_3 = \{a, c, f\}, \quad A_3 = \{t, h, n\}, \quad A_3 = \{u, v, d\}$$
$$A_3 = \{a, c, f\} = \{c, f, a\} = \{f, a, c\}, \quad A_3 = \{c, t, w\}$$

Sama joukko

Palautetaan mieleen muutama tämän joukon 3-permutaatio eli jono.

$$(A_3) = (a, c, f), \quad (A_3) = (t, h, n), \quad (A_3) = (u, w, d)$$
$$(A_3) = (a, f, c), \quad (A_3) = (c, a, f), \quad (A_3) = (a, w, h)$$

Eri jonot

Määritelmä, *binomikerroin*:
Luonnollisista luvuista $n, k \in \boldsymbol{N}$, missä $0 \leq k \leq n$ muodostettavaa laskutoimitusta

$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}, \qquad \text{merkitään } \binom{n}{k}$$

kutsutaan *binomikertoimeksi*. Laskimessa nCr – näppäin.

Lause, *k-kombinaatioiden lukumäärä*:
Jos äärellisen joukon A alkioiden lukumäärä on n, niin tämän joukon A k-kombinaatioiden lukumäärä on $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, $\quad 0 \leq k \leq n$.
Tod: Koska järjestyksellä ei ole väliä, niin jaetaan k-permutaatioiden lukumäärä $\frac{n!}{(n-k)!}$ vielä luvulla $k!$, siis

$$\frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} =: \binom{n}{k}$$

Luetaan ”n yli k:n”.
Yhteys Pascalin kolmioon → MAOL

Esimerkki 3:
a)

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!\,(8-3)!} = \frac{8!}{3!\,5!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{336}{6} = 56$$

Laskimeen näppäillään: 8 nCr 3 =
b)

$$\binom{49}{17} = \frac{49!}{17!\,(49-17)!} = \frac{49!}{17!\,32!} = \frac{1\cdot\cdots\cdot32\cdot33\cdot\cdots\cdot49}{1\cdot\cdots\cdot17\cdot1\cdot\cdots\cdot32}$$

$$= \frac{33\cdot\cdots\cdot49}{1\cdot\cdots\cdot17} \approx 6{,}499\ldots\cdot10^{12}$$

Laskimeen näppäillään: 49 nCr 17 =
c)

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!\,0!} = \frac{n!}{n!\cdot1} = 1$$

Mitä tämä tarkoittaa?
Kuinka monta n-alkion osajoukkoa voidaan muodostaa joukosta, jossa on n kpl alkioita. No, tietysti yksi, koko joukko itse.

Esimerkki:

Kuinka monta erilaista lottoriviä on olemassa?

Lottorivi saadaan valitsemalla 39:stä luvusta (luvut $1 - 39$) 7 kiinnittämättä järjestykseen huomiota. Vaikka puhutaan lottorivistä, niin tarkasteltava asia on joukko lukuja eikä jono lukuja. Kaikkien lottorivien lukumäärä on siis 7-alkioisten osajoukkojen, eli 7-kombinaatioiden, lukumäärä 39-alkioisesta perusjoukosta:

$$\binom{39}{7} = \frac{39!}{7!\,(39-7)!} = 15\,380\,937.$$

Jos järjestykseen halutaan kiinnittää huomiota, niin joukon, jossa on 7 alkiota, permutaatio on $7! = 5040$, eli kaiken kaikkiaan eri tavoin saatuja eri lottorivejä on $\binom{39}{7}\cdot 7! = \frac{39!}{(39-7)!} = 7{,}751\ldots\cdot 10^{10}$ kappaletta. Tämähän on 39 alkioisen joukon 7-permutaatio.

Esimerkki:

Korttipakassa on yhteensä 52 korttia, 4 eri maata, jokaista maata 13 eri korttia: ässä, luvut 2-10, sotilas, kuningatar ja kuningas. Jokereita ei siis ole!

Kuinka monella eri tavalla saadaan korttipakasta **a)** neloset, **b)** kolme pataa ja kaksi herttaa, **c)** kaksi paria, **d)** täyskäsi ja **e)** kolmoset?

Korttitehtävissä tarkastellaan usein vain tiettyä joukkoa, eli miten ollaan saatu kyseiset kortit (pelikielessä se tietty ”käsi”, esim. kolmoset), jotka pakasta saadaan. Tämän joukon erilaisia saantivaihtoehtoja (miten ”käsi” saatiin, esim. tuliko ensin kaksi muuta korttia ja kolme viimeistä oli samaa numeroa vai tuliko ensin yksi ”kolmosten” numero sitten kaksi muuta ja lopuksi kaksi muuta ”kolmosten” numeroa) ei useimmiten tarkastella.

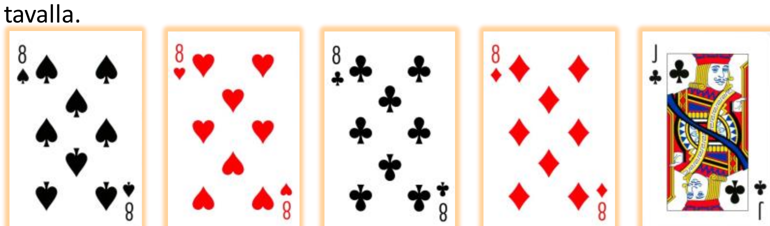
a) Neloset tarkoittavat neljä samaa korttia (kaikki siis eri maata, esim. 4xjätkä) ja viides kortti voi olla mikä vaan. Neloset on mahdollista saada 13 eri tavalla:

$4 \times \text{ässä},\quad 4\times 1,\quad 4\times 2,\quad \ldots\quad ,4\times \text{kuningas}.$

Viides kortti voidaan valita 48 eri tavalla. Neloset (”kätenä”) saadaan näin ollen

$$13\cdot 48 = 624$$

eri tavalla.



Toisaalta, jos halutaan miettiä kuinka monella eri tavalla kyseinen käsi (neloset) eli viisi korttia voisi tulla, niin se saadaan suoraan permutaatiosta

$$5! = 120.$$

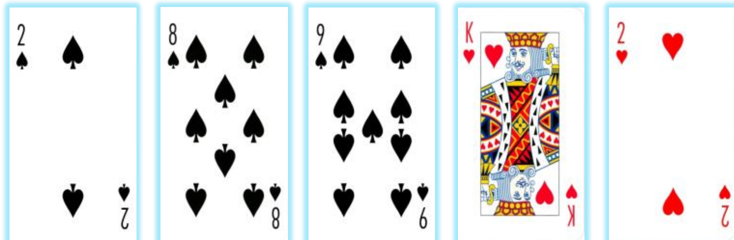
Täten tuloperiaatteen mukaan pelaajalle eri tavoin jaettavia erilaisia nelos-käsiä on mahdollista jakaa

$$\overbrace{13\cdot 48}^{\text{erilaisia}}\cdot \overbrace{120}^{\substack{\text{eri}\\ \text{tavoin}}} = 74880$$

kappaletta (neloskäsiä 624 kpl ja eräs nelonen 120 eri tavalla).

b) Kolme pataa voidaan valita $\binom{13}{3}$ eri tavalla ja kaksi herttaa $\binom{13}{2}$ eri tavalla kun järjestykseen ei kiinnitetä huomiota. Näin ollen tuloperiaatteen nojalla:

$$\binom{13}{3} \cdot \binom{13}{2} = 22\,308.$$



Mikäli järjestykseen kiinnitettäisiin huomiota, niin viisi korttia voitaisiin valita $5! = 120$ eri tavalla. Tuloperiaatetta hyödyntäen:

$$\binom{13}{3} \cdot \binom{13}{2} \cdot 120 = 2\,676\,960.$$

c) Parien numerot voidaan valita $\binom{13}{2}$ eri tavalla (eli esim. 4 ja ässä tai 3 ja 5 tai 7 ja 10). Toisaalta maat voidaan valita molemmissa pareissa $\binom{4}{2}$ eri tavalla (eli esim. 4♠ ja 4♡ tai 4♦ ja 4♡ jne.). Viides kortti voidaan valita $52 - 4 - 4 = 44$ eri tavalla (suljetaan pois täyskäden mahdollisuus, siis yllä ensimmäinen 4 vähentää "kädessä" olevat kortit ja toinen 4 sulkee pois täyskäden). Näin ollen tuloperiaatteen nojalla:

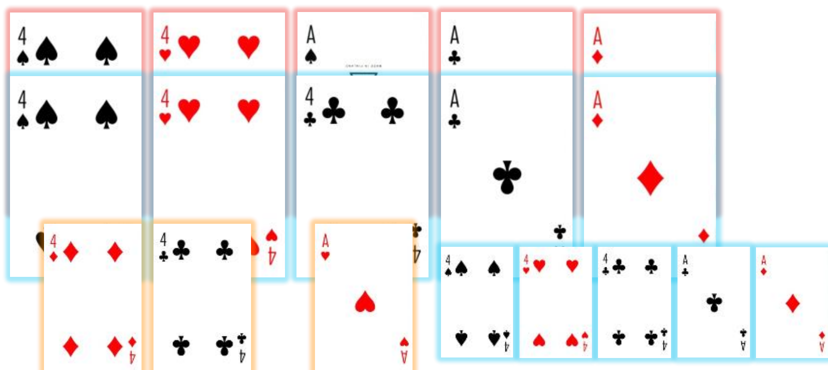
$$\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} \cdot 44 = 123\,552$$

Onko nelosten vaihtoehto huomioitu. Kyllä on, nimittäin termi $\binom{13}{2}$ sulkee pois sen vaihtoehdon, että kaikki neljä korttia olisikin samaa numeroa.

Paljonko tulisi eri tavoin erilaisia *kaksi pari – "käsiä"*?
VASTAUS: $123\,552 \cdot 120 = 14\,826\,240.$

d) Vastaavasti kuin kahden parin tapauksessa, niin myös täyskädessä numerot voidaan valita $\binom{13}{2}$ eri tavalla (eli esim. 2 kertaa 4 ja kolme kertaa ässä tai 2×3 ja 3×5 jne). Toisaalta yhtä hyvin voidaan saada 2 kertaa ässä ja kolme kertaa 4 tai 2×5 ja 3×3 jne., eli toisinpäin kuin edellä. Siispä kerrotaan vielä kahdella. Kaksi samaa numeroa neljästä voidaan valita $\binom{4}{2}$ eri tavalla ja kolme samaa numeroa neljästä $\binom{4}{3}$ eri tavalla. Lisäksi nyt ei jaeta ns. ”viidettä korttia” ollenkaan, joten saadaan:

$$\binom{13}{2} \cdot 2 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{3} = 3744.$$



Täyskäsi voidaan myös perustella seuraavasti:
Koska korttiarvoja (eli numeroita) on 13 kappaletta, niin erilaisia kolmosia on $13 \cdot \binom{4}{3}$ kappaletta. Pari voidaan täten valita 12 eri korttiarvosta (eli numerosta) eri tavalla $12 \cdot \binom{4}{2}$. Siis

$$13 \cdot \binom{4}{3} \cdot 12 \cdot \binom{4}{2} = 3744.$$

Yhtälailla voitaisiin aluksi valita pari 13 eri korttiarvosta ja kolmoset sitten 12 eri korttiarvosta, ei muuta lopputulosta. Miksi jälkimmäinen valitaan vain 12 eri korttiarvosta? Siksi, että paria ei kolmosten korttiarvosta voida enää muodostaa (tai ettei tulisi vitosia, jos jokerit käytössä).

Lopuksi, jos halutaan edelleen tutkia erilaisten täyskäsien määrän lisäksi eri tavoin pelaajalle tulevaa täyskättä, niin kerrotaan tulos 3744 vitosen kertomalla, $5! = 120$, jolloin

$$3744 \cdot 120 = 449\,280.$$