Kombinatoriikka

Todennäköisyyksiä (-laskuja) varten tarvitaan tieto tapahtumille suotuisien alkeistapausten lukumäärästä eli tapahtumaa vastaavan osajoukon alkioiden lukumäärästä.

Kombinatoriikalla eli kombinaatio-opilla tarkoitetaan niitä laskusääntöjä, joilla *äärellinen* joukko voidaan jakaa erilaisiin ryhmiin ja laskea näiden lukumääriä. Kombinatoriikka voidaan jakaa kolmeen osaan:

1. Kuinka monella tavalla joukon kaikki alkiot voidaan järjestää jonoksi?
   Tähän antaa vastauksen: *tuloperiaate* ja *permutaatio*

2. Kuinka monta k:n alkion järjestettyä jonoa on n:n alkion joukolla?
   Tähän antaa vastauksen: k*-permutaatio*

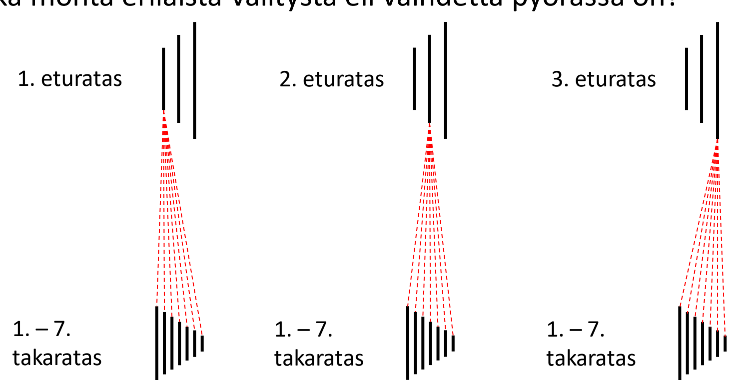
3. Kuinka monta k:n alkion osajoukkoa on n:n alkion joukolla?
   Tähän antaa vastauksen: k*-kombinaatio*

Lisäksi (myöh.) tarkastellaan toistokoetta ja binomitodennäköisyyttä.

Tuloperiaate ja permutaatio

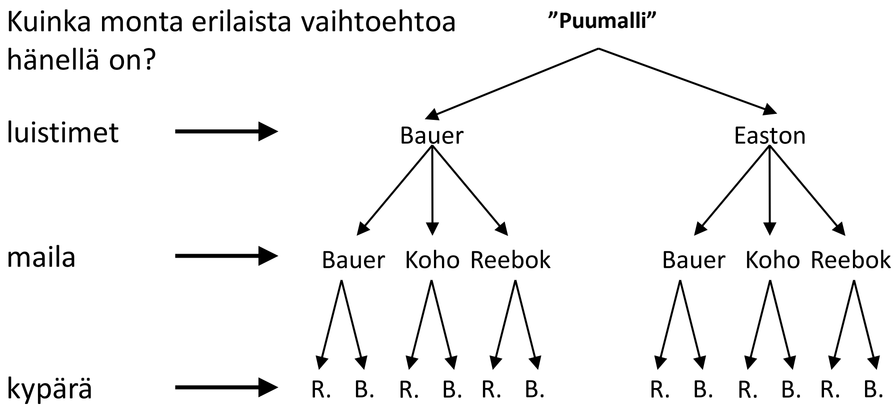
Esimerkki 1:

Maastopyörässä on kolme etuhammasratasta ja 7 takahammasratasta. Kuinka monta erilaista välitystä eli vaihdetta pyörässä on?



Yhteensä: $3 \cdot 7 = 21$ vaihdetta.

Esimerkki 2:
Pelicansin pelaaja valmistautuu toiseen finaaliotteluun. Hän voi valita luistimet kahdesta mahdollisesta (joko Bauer tai Easton), mailan kolmesta mahdollisesta (Bauer, Koho tai Reebok) ja kypärän kahdesta mahdollisesta (Reebok tai Bauer).
Kuinka monta erilaista vaihtoehtoa hänellä on?



Yhteensä: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

***Tuloperiaate (yleisesti)*:**
Tuloperiaatetta voidaan kuvata prosessiksi eri valintoja. Jos jokin prosessi voidaan suorittaa k eri vaiheessa siten, että

- 1. vaiheessa on n_1 kappaletta eri vaihtoehtoja,
- 2. vaiheessa on n_2 kappaletta eri vaihtoehtoja,

jne.

- k. vaiheessa on n_k kappaletta eri vaihtoehtoja,

niin koko prosessi voidaan tehdä

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_{k-1} \cdot n_k$$

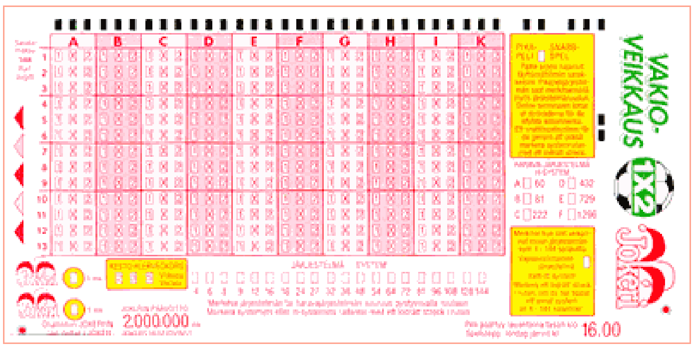
eri tavalla.
Huom! Toisten vaiheiden valinnoilla ei ole vaikutusta toisten vaiheiden valintoihin.
Tulkinta: Saatava luku on eri vaiheissa esiintyvien valintamahdollisuuksien tulo.

Esimerkki 3:
Kuinka monta erilaista veikkausriviä on olemassa?

Yhden veikkauskohteen tulos valitaan joukosta $T = \{1, \mathrm{x}, 2\}$ ja kohteita on yhteensä 13 kpl. Yksi veikkausrivi vastaa prosessia, jossa on 13 eri vaihetta. Kussakin vaiheessa tehdään valinta kolmesta eri vaihtoehdosta. Näin ollen erilaisia veikkausrivejä on tuloperiaatteen nojalla

$$\underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 3}_{\text{yht.13 kpl}} = 3^{13} = 1\,594\,323$$

kappaletta.



***Tuloperiaate (toistuville valinnoille)*:**
Edellinen esimerkki voidaan yleistää. Jos valintaprosessi suoritetaan aina samasta joukosta, niin eri vaihtoehtotapoja suorittaa prosessi on tällöin joukon alkioiden lukumäärä korotettuna potenssiin vaiheiden lukumäärällä.
Muistisääntönä: ”Ei se noppa muista, minkä tuloksen se antoi viime kerralla.” (Siis vaikka valinnat tehdään joka vaiheessa samasta joukosta, niin eri vaiheiden valinnat eivät riipu toisistaan.)

Esimerkki 4:
Nopassa on 6 silmälukua (tahkoa) ja noppaa heitetään 4 kertaa. Erilaisia silmälukujonoja on

$$6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4 = 1296$$

kappaletta.

1. Heiton eri vaihtoehdot

2. Heiton eri vaihtoehdot

3. Heiton eri vaihtoehdot

4. Heiton eri vaihtoehdot

Määritelmä, *kertoma*:
Luonnollisen luvun $n \in \boldsymbol{N}$ kertoma on tulo
$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$
Lisäksi asetetaan $0! = 1$. (Negatiivisille kokonaisluvuille ei ole määritelty kertomaa.)

Esimerkki 5:
$$\frac{7!}{4!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$$

Määritelmä, *permutaatio*:
Äärellisen joukon *permutaatio* on tämän joukon alkioista muodostettu *järjestetty jono*, jossa jokainen alkio esiintyy täsmälleen yhden kerran. Joukon alkioiden asettamista eri järjestykseen sanotaan *permutoimiseksi*.

Lause, *Permutaatioiden lukumäärä*:
Jos äärellisen joukon A alkioiden lukumäärä on n, niin joukon A permutaatioiden lukumäärä on $n!$ (Laskimessa ! on usein SHIFT+).
Tod: *Jonon ensimmäinen jäsen voidaan valita* n *eri tavalla, toinen jäsen* $n-1$ *tavalla ja näin jatkaen viimeinen jäsen yhdellä tavalla. Siis*
$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Esimerkki 6:
Tikkurilan lukion todennäköisyyskurssin MAA06.52 ryhmässä on 29 opiskelijaa. Kuinka moneen eri jonoon heidät (teidät ☺) voidaan järjestää?

Vastaus:
Jonon ensimmäinen jäsen voidaan valita 29 eri tavalla, toinen 28 eri tavalla jne. ja viimeinen yhdellä tavalla, joten yhteensä jonoja on
$$29! \approx 8{,}8417 \ldots \cdot 10^{30}$$
kappaletta.

Esimerkki 7:

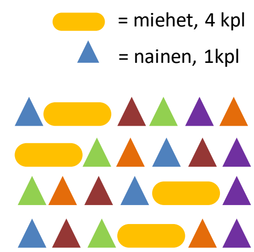
Bussipysäkillä on 5 naista ja 4 miestä. Kuinka monella eri tavalla he voivat asettua jonoon, jossa

a) Nainen on alussa ja lopussa b) kaikki miehet ovat peräkkäin

toisen päädyn nainen toisen päädyn nainen

a) Päädyissä olevat naiset voidaan valita $5 \cdot 4 = 20$ eri tavalla. Jonon keskellä olevat henkilöt, 4 miestä ja 3 naista (yhteensä 7), voidaan järjestää $7! = 5040$ eri tavalla. Tuloperiaate antaa:

$$20 \cdot 5040 = 100\,800$$



Tässä siis vain muutama vaihtoehto

b) Pelkät miehet voidaan asettaa $4! = 24$ eri tavalla peräkkäin. Ajatellaan miehet yhtenä muodostettavan jonon yksikkönä, jolloin jonossa on $5 + 1 = 6$ yksikköä. Näin ollen erilaisia jonoja tulee $6! = 720$ kappaletta ja tuloperiaate antaa:

$$4! \cdot 6! = 24 \cdot 720 = 17\,280$$

k-permutaatiot eli variaatiot

Määritelmä, *k-permutaatio*:

Äärellisen joukon k-permutaatio on *jono*, jossa on k kappaletta tämän joukon alkiota. Erityisesti n-alkioisen joukon permutaatio ja n-permutaatio ovat samat.

Esimerkki:

Olkoon äärellinen joukko $A = \{a, c, f, t, h, n, u, w, d\}$, jolloin mm. seuraavat jonot ovat tämän joukon 3-permutaatioita (tässä ei ole kaikki mahdolliset, vain muutama).

$$(A_3) = (a, c, f), \quad (A_3) = (t, h, n), \quad (A_3) = (u, w, d)$$
$$(A_3) = (a, f, c), \quad (A_3) = (c, a, f), \quad (A_3) = (a, w, h)$$

Huomautus:

Havaitse, että k-permutaatioissa jonon alkioiden *järjestyksellä on väliä*. Joukosta A (esimerkki yllä) muodostetut 3-permutaatiot

$$(A_3) = (a, c, f), \quad (A_3) = (a, f, c), \quad (A_3) = (c, a, f)$$

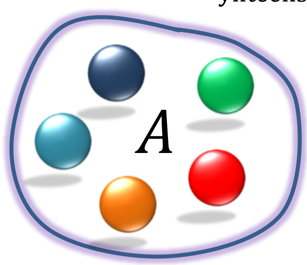
ovat kaikki eri jonoja, siis eri 3-permutaatioita.

Laskimesta permutaatioiden lukumäärän antaa näppäin nPr .

Lause, *k-permutaatioiden lukumäärä*:
Jos äärellisen joukon A alkioiden lukumäärä on n, niin tämän joukon A k-permutaatioiden lukumäärä on $\frac{n!}{(n-k)!}$.

Tod: Jonon, jossa on k alkiota, ensimmäinen jäsen voidaan valita n eri tavalla, toinen jäsen $n-1$ tavalla ja näin jatkaen viimeinen jäsen eli k:nnes jäsen $n-(k-1)$ yhdellä tavalla. Siis

$$\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot\dots\cdot\big(n-(k-2)\big)\cdot\big(n-(k-1)\big)}_{\text{yhteensä } k \text{ kappaletta}} \overset{\substack{\text{lavennus}\\(n-k)!\text{ :lla}}}{\triangleq} \frac{n!}{(n-k)!}$$



$$\frac{5!}{(5-2)!}=\frac{5!}{3!}=4\cdot 5=20$$