Kertolaskusääntö

TOD.NÄK JA TILASTOT, MAA10

Tarkastellaan kahta toisistaan riippumatonta tapahtumaa A ja B. Riippumattomuus tarkoittaa, ettei toisen tapahtuman tapahtuminen vaikuta millään tavoin toisen tapahtuman tapahtumiseen. Mikä olisi todennäköisyys, että molemmat tapahtumat A ja B tapahtuvat, eli

$$P(A \text{ ja } B).$$

Esimerkki:

Merkitään tunnettuja satunnaisilmiöitä $\begin{cases} E_1 = \text{pelikortin otto} \\ E_2 = \text{nopan heitto} \end{cases}$ ja

vastaavasti tapahtumia $A =$ ”Saadaan hertta 8”, $B =$ ”Saadaan vähintään silmäluku 4”.

Tällöin tapahtumat A ja B ovat riippumattomia toisistaan ja saadaan suotuisat alkeistapaukset (jotka ovat siis järjestettyjä pareja) tapahtumalle $P(A \cap B)$:

$$(\heartsuit 8, 4), \qquad (\heartsuit 8, 5), \qquad (\heartsuit 8, 6)$$

Esimerkki (jatkuu):

Yhteensä alkeistapauksia on

$$N(E_1) \cdot N(E_2) = 52 \cdot 6 = 312.$$

Toisaalta $P(A) = \frac{1}{52}$ ja $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, joten

$$P(A \cap B) \overset{\substack{A,B \text{ riippu−} \\ \text{mattomia}}}{=} P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{52} \cdot \frac{3}{6} = \frac{3}{312} = \frac{1}{104} \approx 0{,}0096$$

Lause, *kertolaskusääntö*:

Jos A ja B ovat toisistaan riippumattomia tapahtumia, niin pätee *riippumattomien tapahtumien kertolaskusääntö*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Sääntöä käytetään yhdistettäessä eri satunnaisilmiöitä tai toistettaessa samaa satunnaisilmiötä.

Yleisesti, jos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ovat keskenään riippumattomia tapahtumia, niin

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ \ldots \cap A_9) = P(A_1) \cdot \ \ldots \cdot P(A_n)$$

Ehdollinen todennäköisyys

Esimerkki:
Korttipakasta vedetään peräkkäin kaksi korttia. Mikä on todennäköisyys, että molemmat kortit ovat ruutuja? Olkoot $A =$ "Eka kortti ruutu" ja $B =$ "Toka kortti ruutu".
Tällöin ekalle kortille saadaan

$$P(A) = \frac{13}{52},$$

Mutta mikä on $P(B)$? Havaitaan, että perusjoukko on vähentynyt yhdellä kortilla eli $P(B) = \frac{?}{51}$ ja toisaalta suotuisia alkeistapauksia on yksi vähemmän eli enää 12 kpl, siis

$$P(B) = \frac{12}{51}.$$

Näin ollen tapahtuma B riippuu tapahtumasta A. Oikeampi merkintätapa onkin $P(B|A)$ eikä vain $P(B)$. Tämän sanoo määritelmä.

Määritelmä, *ehdollinen todennäköisyys*:
Olkoot A ja B perusjoukon E tapahtumia ja lisäksi $P(A) > 0$. *Tapahtuman B ehdollinen todennäköisyys ehdolla A* on

$$P(B \text{ tapahtuu, kun tiedetään että } A \text{ tapahtuu}) = \frac{P(A \text{ ja } B \text{ tapahtuvat})}{P(A \text{ tapahtuu})},$$

eli matemaattisin merkinnöin

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)},$$

missä termi $P(B|A)$ tarkoittaa *todennäköisyyttä B ehdolla A.*
Tämä voidaan yleisesti perustella

$$P(B|A) = \frac{N(A \cap B)}{N(A)} = \frac{\frac{N(A \cap B)}{N(E)}}{\frac{N(A)}{N(E)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Lisäksi sanotaan, että tapahtumat A ja B ovat *riippumattomia* (toisistaan), jos $P(B|A) = P(B)$, ja *riippuvia* (toisistaan), jos $P(B|A) \neq P(B)$.

Esimerkki:
Tarkastellaan riippumattomuutta ja osoitetaan edellä mainittu tulos.

$$P(B|A) \overset{\text{Määr.}}{\cong} \frac{P(A \cap B)}{\underbrace{P(A)}_{>0}} \overset{\substack{A,B \text{ riippu}-\\ \text{mattomia}}}{\cong} \frac{P(B) \cdot P(A)}{P(A)} = P(B), \qquad \text{OK}$$

Esimerkki:
Määritelmästä seuraa yleinen kertolaskusääntö tapahtumille A ja B:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

Joka yleistyy useammalle tapahtumalle (tässä kolme tapahtumaa)

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A, B)$$

Esimerkki:
Niin, ruutujen lukumäärä?

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{13}{52} \cdot \frac{12}{51} = \frac{1}{17} \approx 0{,}0588$$

Monivaiheisen kokeen kertolaskusääntö

1. **Monivaiheinen koe, vaiheet riippumattomia**
2. **Monivaiheinen koe, vaiheet riippuvia**
3. **Toistokoe**

1. Monivaiheinen koe, vaiheet riippumattomia:
Olkoon A ensimmäisen vaiheen ja B toisen vaiheen jokin tapahtuma. Merkintä (A, B) tarkoittaa, että ensimmäisessä vaiheessa tapahtuu A ja toisessa vaiheessa B. Vaiheet ovat riippumattomia, joten tällöin

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B).$$

2. Monivaiheinen koe, vaiheet riippuvia:
Olkoon A ensimmäisen vaiheen ja B toisen vaiheen jokin tapahtuma. Merkintä (A, B) tarkoittaa, että ensimmäisessä vaiheessa tapahtuu A ja toisessa vaiheessa B. Nyt vaiheet riippuvat, jolloin

$$P(A, B) = P(A) \cdot P(B|A) = P(A) \cdot \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

3. Toistokoe:
Toistokokeen yksittäiset vaiheet ovat samoja eivätkä riipu toisistaan. Toistokokeen menetelmää hyödynnetään usein komplementtien todennäköisyystapauksissa. Olkoon A jokin tapahtuma. Vaihe suoritetaan $n \in \boldsymbol{N}$ kertaa. Mikä on todennäköisyys, että tapahtuma A ei tapahdu kertaakaan.

$$P(A \text{ ei kertaakaan}) = P(\bar{A})^n.$$

Mikä on todennäköisyys, että tapahtuma A tapahtuu ainakin kerran.

$$P(A \text{ ainakin kerran}) = 1 - P(\bar{A})^n.$$