TODENNÄKÖISYYS JA TILASTOT, MAA10

JOUKKO-OPPIA: joukot, Venn-diagrammi, tulojoukko

Joukkojen esitystapoja ovat:

- Luetellaan alkiot, esim.

$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots\}$, $\quad B = \{-10, -9, \ldots, -3, -2, -1\}$

$C = \{a^2, b^2, c, d, \sqrt{e}, \ldots\}$, $\quad D = \left\{5, 179, 10^{43+\pi}, e^{\sqrt{2}}, -8900033\right\}$

- Ilmoitetaan joukko alkioiden ominaisuuden perusteella, esim.

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid P(x)\},$$

missä $P(x)$ on alkioiden x ominaisuusehto. Esimerkiksi $x \geq 10$, jolloin

$$E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 10\} = \{10, 11, 12, \ldots\}.$$

Vastaavasti

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 1 + 2n, n \in \mathbb{N}\}$$
$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -10 \leq x \leq -1\}.$$

MUISTA: Joukot kirjoitetaan isoilla kirjaimilla, lukujoukot vahvennettuina, alkiot pienellä. Joukoille aaltosulut ja alkiot erotetaan pilkulla.

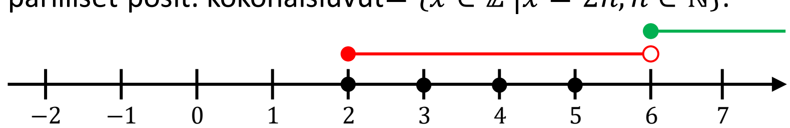
Merkintöjä:	$a \in A$	Alkio a *kuuluu* joukkoon A, eli a on joukon A alkio.
MUISTA! Alkiot kuuluvat, joukot sisältyvät!	$a \notin A$	Alkio a *ei kuulu* joukkoon A, eli a ei ole joukon A alkio.
	$A \subset B$ $A \subseteq B$	Joukko A *sisältyy* joukkoon B, eli joukko A on joukon B *osajoukko*.
	$A \not\subset B$ $A \nsubseteq B$	Joukko A *ei sisälly* joukkoon B, eli joukko A ei ole joukon B osajoukko.
Huomaa ero !	$A \subsetneq B$	Joukko A on joukon B *aito osajoukko*.
	$\emptyset$	Tyhjä joukko. HUOM! Aina pätee: $\emptyset \subset A$ ja $A \subset A$.

Esimerkki 1 (moniste):

1a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x < 6\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

2b) parittomat posit. kokonaisluvut$= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 1 + 2n, n \in \mathbb{N}\}$,
parilliset posit. kokonaisluvut$= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 2n, n \in \mathbb{N}\}$.

6a)
6b)
6c)



Venn - diagrammi, yhdiste, leikkaus, erotus ja komplementti

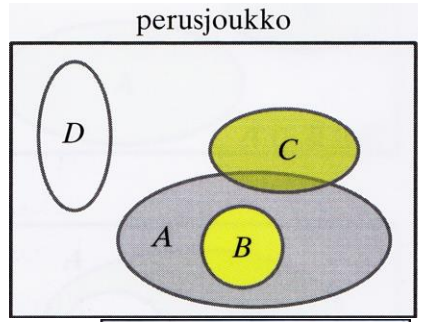
Joukkojen keskinäisiä suhteita havainnollistetaan Venn-diagrammeilla. Perusjoukolla, merkitään joko E tai X, tarkoitetaan kaikkia tarkasteltavia alkioita. Esimerkkikuvan tilanteessa

$$A \not\subset C, \qquad C \not\subset A,$$

mutta $B \subset A$, vieläpä aidosti, eli

$$B \subsetneq A.$$

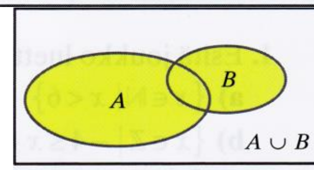
Joukot A ja D ovat erilliset, eli
$A \cap D = \emptyset$.

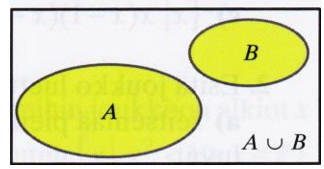


Yhdiste eli unioni:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ tai } x \in B\}$$

Alkio a kuuluu vähintään toiseen joukkoon. Alkio a voi kuulua molempiin joukkoihin. Muista matemaattinen **tai** on *sisältävä* eli *inklusiivinen tai* eikä *poissulkeva tai*.

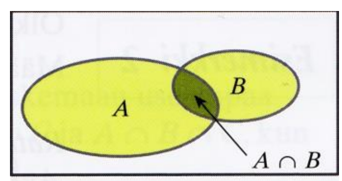


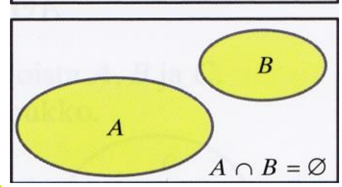


Leikkaus:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \in B\}$$

Alkion a on kuuluttava molempiin joukkoihin, sekä A:han että B:hen.

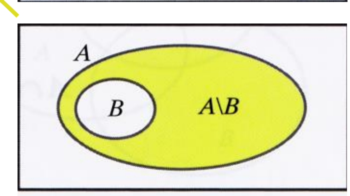




Erotus:

$$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ ja } x \notin B\}$$

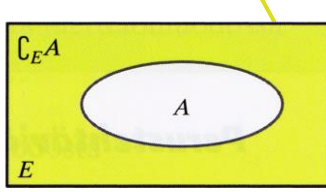
Alkio a kuuluu joukkoon A mutta ei kuulu joukkoon B.

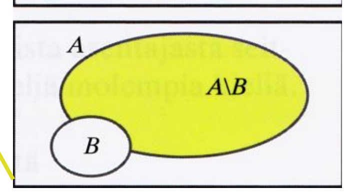


Komplementti:

$$E \backslash A = \{x \mid x \in E \text{ ja } x \notin A\}$$

Muita merkintöjä
$\bar{A} = \complement_E A = A^C$
$= \complement A$.





Esimerkki 2 (moniste):

9) Olkoot $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5\}$ ja $C = \{1, 2, 3\}$.
Muodosta $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$ ja $A \cap C$.

10) Olkoot joukot A, B ja C kuten 9)-tehtävässä. Muodosta joukot $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus C$ ja $C \setminus B$.

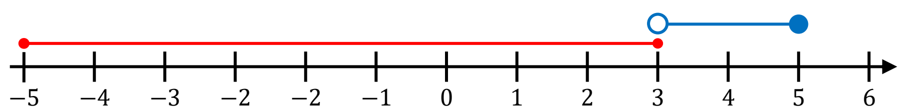
11) Määritä joukot $A \cup B$ ja $A \cap B$ sekä havainnollista ratkaisua lukusuoralla, kun $A = \{x | -5 \leq x \leq 3\}$, $B = \{x | 3 < x \leq 5\}$.

Ratkaisu:

9) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ja $A \cap B = \{3, 4\}$ sekä
$A \cup C = \{1, 2, 3, 4\}$ ja $A \cap C = \{1, 2, 3\} = C$, eli $C \subsetneq A$.

10) $A \setminus B = \{1, 2\}$ ja $A \setminus C = \{4\}$ sekä
$B \setminus C = \{4, 5\}$ ja $C \setminus B = \{1, 2\}$.

11) $A \cup B = \{x | -5 \leq x \leq 3\}$ ja $A \cap B = \emptyset$.



Tulojoukko, karteesinen tulo

Määritelmä, *tulojoukko*:
Joukkojen A ja B *tulojoukko* $A \times B$ (lue: ”A risti B”) on kaikkien niiden *järjestettyjen parien* (x, y) joukko, missä $x \in A$ ja $y \in B$,

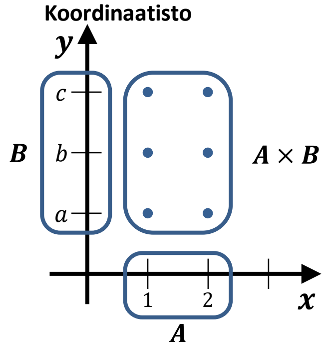
$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ ja } y \in B\}.$$

YLEISTYS!

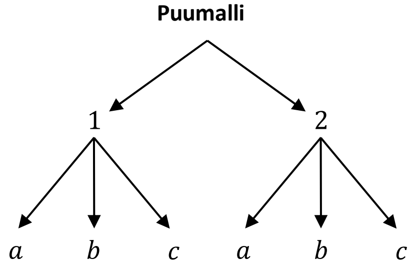
Esimerkki:
Olkoon joukko $A = \{1,2\}$ ja joukko $B = \{a, b, c\}$. Tällöin tulojoukko $A \times B$ on

$$A \times B = \{(x, y) | \ x \in A \text{ ja } y \in B\} = \{(1, a), (1, b), (1, c), (2, a), (2, b), (2, c)\}$$

Koordinaatisto



Puumalli



Tulojoukon alkioiden lukumäärä:
$$N(A \times B) = 6 = 2 \cdot 3 = N(A)\, N(B)$$