Todennäköisyys

- Todennäköisyyslaskennan juuret ovat ~1650-luvun uhkapeleissä. Kreivi de Mérén noppapelit:
  - Jos noppaa heitetään 4 kertaa, niin kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että saadaan ainakin yksi kutonen?
  - Jos kahta noppaa heitetään 24 kertaa, niin kannattaako lyödä vetoa sen puolesta, että saadaan ainakin yksi kutospari?
  - Kreivi itse ei osannut ratkaista ongelmia matemaattisesti, joten hän kirjoitti ystävälleen Blaise Pascalille, joka kävi kirjeenvaihtoa Pierre de Fermat:n kanssa. Tätä kirjeenvaihtoa pidetään todennäköisyyslaskennan alkamisena.
- Ilmiön varmuutta tai epävarmuutta on aina pyritty arvioimaan. Nykyään laskumenetelmät ovat erittäin tehokkaita ja ilmiön arviointi laskennallisesti on luotettavampaa kuin tavanomainen arviointi.
- Tietyt lainalaisuudet pätevät todennäköisyyksiin, josta seuraa, että sattumallakin on omat lakinsa.

Antoine Gombaud, eli chevalier de Méré
?.?.1607 – 29.12.1684

Kirjailija ja matemaatikko

Blaise Pascal
19.6.1623 – 19.8.1662
Matemaatikko, fyysikko, keksijä ja kristitty filosofi

Pierre de Fermat
17.8.1601 (tai 1607) – 12.1.1665
Lakimies, matemaatiko

FERMAT'n suuri lause
…"koska se on liian pitkä sopiakseen tähän marginaaliin"…

« *Au contraire, il est impossible de partager soit un cube en deux cubes, soit un bicarré en deux bicarrés, soit en général une puissance quelconque supérieure au carré en deux puissances de même degré : j'en ai découvert une démonstration véritablement merveilleuse que cette marge est trop étroite pour contenir.* »

Ei löydy sellaista luonnollista lukua $n > 2, n \in \mathbb{N}$, jolle pätisi

$$a^n + b^n = c^n, \qquad a, b, c \in \mathbb{Z}_+$$

”Olen löytänyt suurenmoisen osoituksen tälle väitteelle, mutta marginaali on liian pieni kirjoittaakseni sen tähän.”(vap.suom.)

Määritelmä, *satunnaisilmiö ja satunnaiskoe*:
Satunnaisilmiö on ilmiö, jonka tulosta ei tiedetä etukäteen. *Satunnaiskokeilla* tuotetaan satunnaisilmiöitä ja tietyn satunnaisilmiön *mahdollisia tuloksia* kutsutaan *alkeistapauksiksi.* Kaikkien alkeistapausten joukkoa kutsutaan kyseisen ilmiön *perusjoukoksi* tai *otosavaruudeksi*, merkitään E. Perusjoukon alkioiden eli kaikkien alkeistapausten lukumäärää merkitään $N(E)$.

Esimerkki: Nopan heitto on satunnaiskoe (-ilmiö). Perusjoukkona $E = \{1,2,3,4,5,6\}$ ja $N(E) = 6$.
Kolikon heitto vastaavasti. Nyt perusjoukkona $E = \{\text{kruuna}, \text{klaava}\}$ ja $N(E) = 2$. (Periaatteessa kolikko voisi jäädä myös kyljelleen.)
MUISTA: Joukkoja merkitään isolla kirjaimella ja kaarisulkujen sisään alkiot.

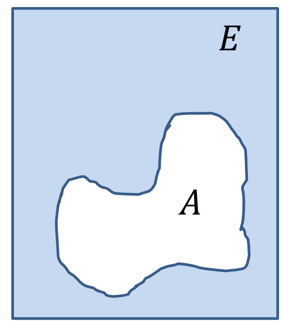
Deterministinen ilmiö (eli tietyn lainalaisuuden määrittävä ilmiö) on satunnaisilmiölle ”vastakkainen”. Tässä esimerkissä se olisi: Jääkö noppa tai kolikko ilmaan leijumaan vai putoaako se, kun sitä heitetään. Tämän ilmiön tulos tiedetään etukäteen, se putoaa.
Determine(eng.) = määrätä

HUOM! Satunnaisilmiö ja sitä kuvaava joukko tavallisesti samaistetaan.

Määritelmä, *pistetodennäköisyys ja symmetrisyys*:
Alkeistapausten todennäköisyyttä sanotaan *pistetodennäköisyydeksi*. Jos kaikkia alkeistapauksia voidaan pitää yhtä mahdollisina, niin ne ovat *symmetrisiä*.

Tavallisesti ei olla kiinnostuneita satunnaisilmiön tai satunnaiskokeen yksittäisestä tuloksesta vaan siitä, että tuloksella on jokin tietty ominaisuus eli tietty tapahtuma tapahtuu.

Määritelmä, *tapahtuma*:
Tapahtuma A on perusjoukon E osajoukko. Yksittäinen alkeistapaus $e \in E$ muodostaa tapahtuman $\{e\}$. Koko perusjoukko E vastaa *varmaa tapahtumaa* ja tyhjä joukko $\emptyset$ *mahdotonta tapahtumaa*.



Määritelmä, *todennäköisyyden merkintä*:
Todennäköisyyttä tapahtumalle A, alkeistapaukselle e, perusjoukolle E ja tyhjälle joukolle $\emptyset$ merkitään isolla P kirjaimella, P=probability.

Esimerkki: Aina pätee $P(E) = 1$, $P(\emptyset) = 0$ ja

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

Jos A=”Saadaan parillinen silmäluku”, niin $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0{,}5$. Tämä voidaan merkitä myös

$$P(\text{”Saadaan parillinen silmäluku”}) = 0{,}5$$

heittomerkit kuuluvat ilmaisutapaan.
Suosi kuitenkin tapaa: Olkoon A= ”tekstiä” jolloin $P(A) = \ldots$

Klassinen todennäköisyys

Määritelmä, *symmetrinen perusjoukko:*
Perusjoukko E on *symmetrinen*, jos se on *äärellinen* ja jos sen kaikki *alkeistapaukset ovat yhtä todennäköisiä*. (2 ehtoa)

(Täsmällisemmin sanottuna: Tarkastellaan perusjoukon E ja todennäköisyysfunktion P muodostamaa todennäköisyyskenttää (E, P).)

Esimerkki: Olkoon $E = \{e_1, e_2, e_3, \dots, e_n\}$ symmetrinen perusjoukko. Tällöin jokaisen alkeistapauksen todennäköisyys on $\frac{1}{n}$.
Olkoon $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ jokin tapahtuma eli A on E:n osajoukko. Tällöin

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \ \dots + P(a_m) = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ kpl}} = \frac{m}{n}$$

Määritelmä, *klassinen todennäköisyys:*
Symmetrisen perusjoukon E tapahtuman A klassinen todennäköisyys on

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(E)} = \frac{\text{suotuisien alkeistapausten lukumäärä}}{\text{kaikkien alkeistapausten lukumäärä}}$$

Esimerkki:

Varma tapahtuma: $A = E \implies P(A) = P(E) = \frac{N(E)}{N(E)} = \frac{n}{n} = 1$,OK

Mahdoton tapahtuma: $A = \emptyset \implies P(A) = P(\emptyset) = \frac{N(\emptyset)}{N(E)} = \frac{0}{n} = 0$,OK

Aina pätee:

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Esimerkki:

Kortteja yhteensä 52 kpl (ei jokereita)

$$P(\text{"Kortti on pun. ässä"}) = \frac{N(\text{"Kortti on pun. ässä"})}{N(E)} = \frac{2}{52} \approx 0{,}038$$

Esimerkki (jatkuu):
Kaksi nopanheittoa (2 heittoa x 1 noppa TAI 1 heitto x 2 noppaa)

$$P(\text{"Silmälukujen summa on 7 tai 10"})$$

Suotuisat alkeistapaukset:

7: $(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)$

10: $(4,6), (6,4), (5,5)$

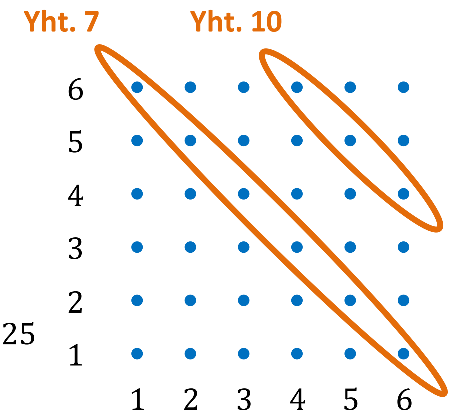
Yhteensä $6 + 3 = 9$ kappaletta.

Kaikki alkeistapaukset:

$(1,1), (1,2), \ldots, (1,6), (2,1), \ldots (2,6),$

$\ldots (6,1), \ldots, (6,6)$

Yhteensä $6 \cdot 6 = 36$ kappaletta.



Näin ollen

$$P(\text{"summa 7 tai 10"}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$