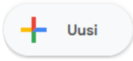
Tehtävien ratkaisut tulee olla tehtynä Googlen Docs-ohjelmalla. Liitä vastauksiisi kuvia Geogebrasta ja esim. TI-*n*spire ohjelmalla tuotettuja matemaattisia ratkaisuja.

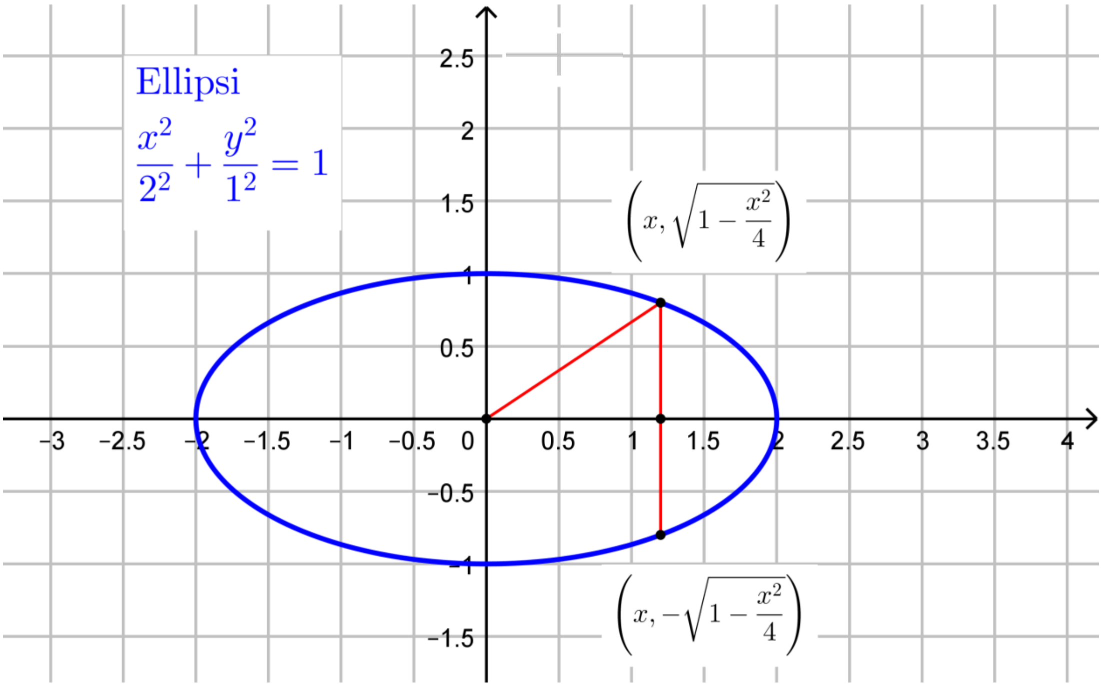
→ Kirjaudu edu.sievi.fi - tunnuksellasi Google Driveen ja MAA4 -kansioon luo alikansio ”Tietokone-harjoitukset” kohdasta 

. Luo tähän kansioon Google Docs dokumentti, jonne kirjoitat/liität vastauksesi. Muista nimetä dokumentti omalla nimelläsi!

1. Harjoitellaan yleisen kappaleen integrointia kahden tehtävän mukaisesti:

a) Kappaleen pohja on ellipsi, jonka pikkuakselin pituus $2b = 2$ ja isoakselin pituus $2a = 4$. Kun kappaletta leikataan isoakselia vastaan kohtisuorilla tasoilla, ovat leikkauskuviot suorakaiteita, joiden korkeus on kaksinkertainen leveyteen nähden. Määritä kappaleen tilavuus perustellen. Huom! MAOLsta löytyy tietoa ellipsistä.

Aukaise liitetiedosto T1teht1a.ggb PEDAsta ja tutki tilannetta 2D ja 3D puolella. Ellipsi saadaan komennolla: `x² / 2² + y² / 1 = 1`



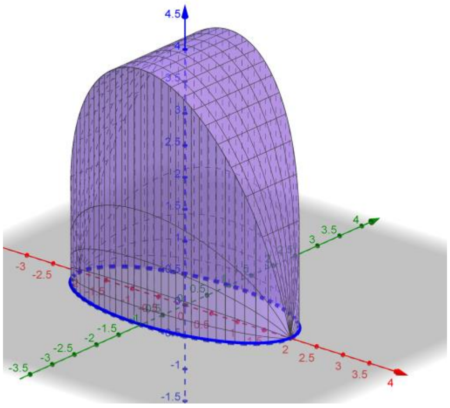
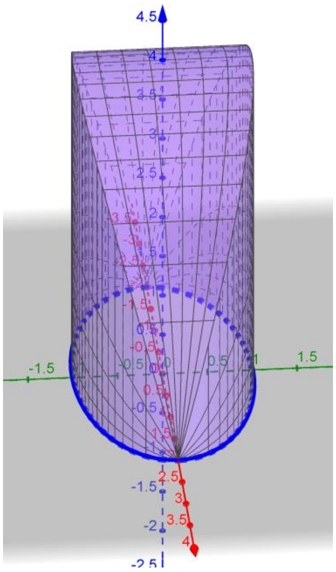
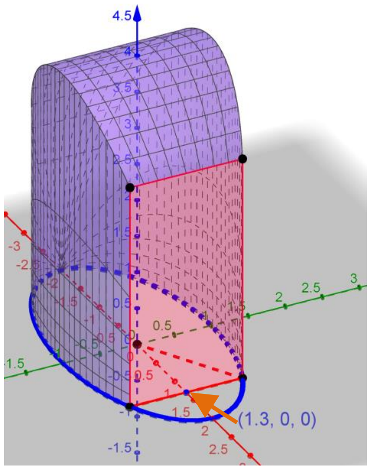
Integrointiväliksi tulee siis $[-2,2]$ ja kohdassa $x \in [-2,2]$, x-akselia vastaan kohtisuoran leikkaussuorakaiteen pohjan leveys on (katso kuva yllä) $2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$. Näin ollen kohdassa $x \in [-2,2]$ poikkipinta-alaksi saadaan

$$A(x) = \text{kanta} \cdot \text{korkeus} = \left(2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right)\left(4 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right) = 8\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 8 - 2x^2$$

tilavuudeksi tulee

$$V = \int_{-2}^{2} dV = \int_{-2}^{2} A(x)\,dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\,dx = \ \dots = \frac{64}{3} \approx 21{,}3\,.$$

Viimeisessä kuvassa on poikkileikkaus tehty kohdassa $x = 1{,}3$.

Pinnat, jotka rajaavat kappaleita on saatu komennoilla (huomaa, että x arvon päätekohta on liukukytkimen arvo p.)

YLÄpinta:

```
Pinta(t, s sqrt(1 - t² / 4), 4sqrt(1 - t² / 4), t, -2, p, s, -1, 1)
```

ETUpinta:

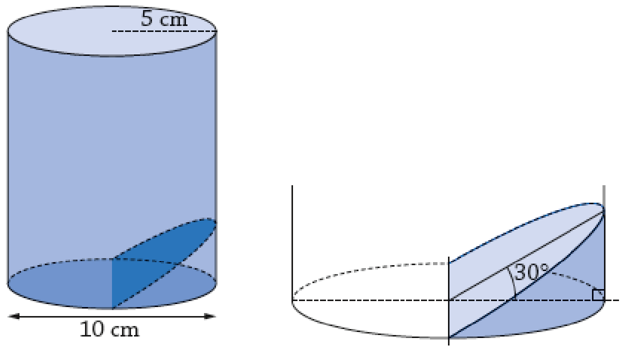
```
Pinta(t, -sqrt(1 - t² / 4), tan(s) sqrt(1 - t² / 4), t, -2, p, s, 0,
atand(4))
```

TAKApinta:

```
Pinta(t, sqrt(1 - t² / 4), tan(s) sqrt(1 - t² / 4), t, -2, p, s, 0,
atand(4))
```

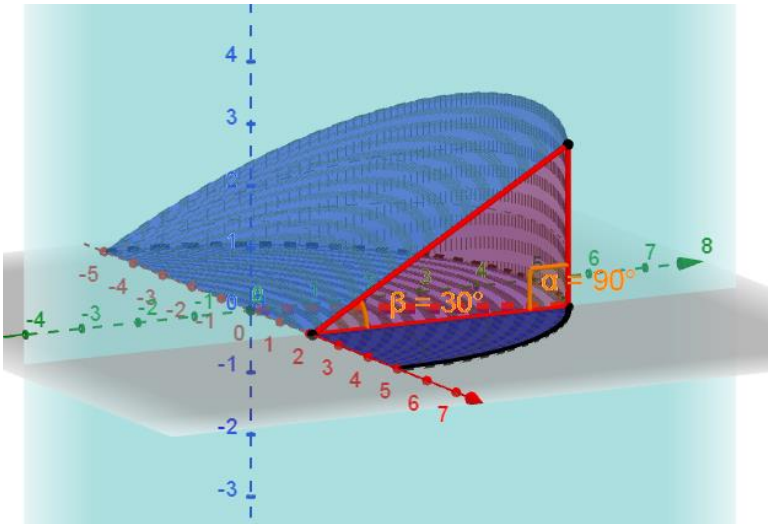
b) T171/JUURI 10 (LOPS21)

Tunnilla tehtiin varsinaiset laskut, nyt tarkastellaan kaikkia tapoja. Aukaise liitetiedostot T1teht1b1.ggb - T1teht1b3.ggb PEDAsta ja tutki tilannetta 2D ja 3D puolella.



Tilavuus voidaan määrittää kolmella erilaisella viipalointiperiaatteella.

1. Integrointi x-akselin suhteen, jolloin poikkileikkauskuvio on suorakulmainen kolmio.

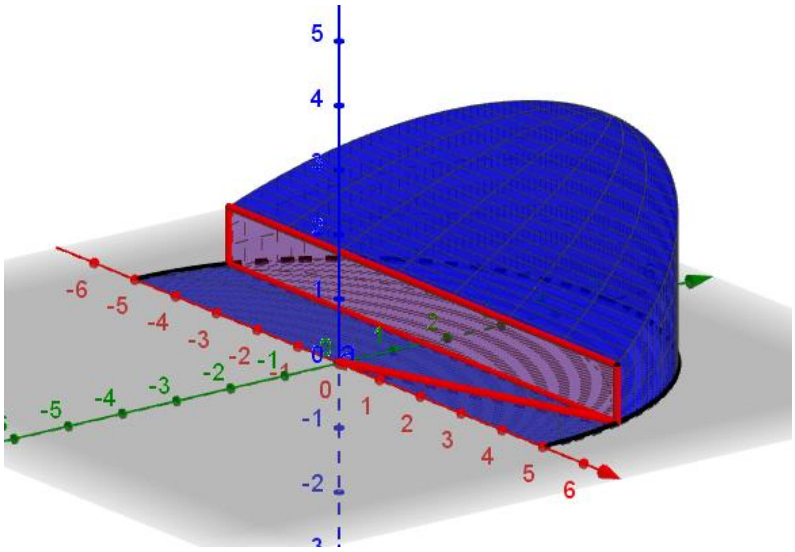


$$A(x) = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sqrt{5^2 - x^2}}_{\text{kanta}} \cdot \underbrace{\sqrt{5^2 - x^2} \cdot \tan(30°)}_{\text{korkeus}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (25 - x^2)$$

ja

$$V = \int_{-5}^{5} dV = \int_{-5}^{5} A(x)\,dx = \int_{-5}^{5} \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (25 - x^2)\,dx = \ \dots = \frac{250}{3\sqrt{3}} \approx 48{,}1$$

2. Integrointi y-akselin suhteen, jolloin poikkileikkauskuvio on suorakulmio.

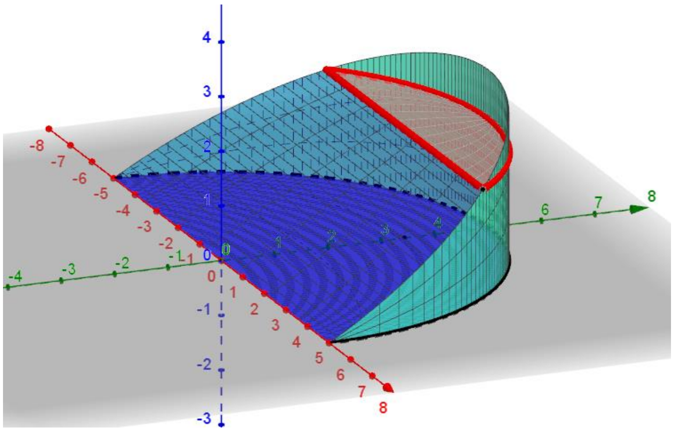


$$A(y) = \underbrace{2\cdot\sqrt{5^2-y^2}}_{\text{kanta}}\cdot\underbrace{y\cdot\tan(30°)}_{\text{korkeus}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot y\cdot\sqrt{5^2-y^2}$$

ja

$$V = \int_0^5 dV = \int_0^5 A(y)\,dy = \int_0^5 \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot y\cdot\sqrt{5^2-y^2}\,dy = \ \dots = \frac{250}{3\sqrt{3}} \approx 48{,}1$$

3. Integrointi z-akselin suhteen, jolloin poikkileikkauskuvio on ympyräsegmentti.



$$A(z) = A_{\text{segmenttii}} = A_{\text{sektori}} - A_{\text{kolmio}}$$

$$= \underbrace{\frac{\cos^{-1}\left(\dfrac{5^2+5^2-\left(2\cdot\sqrt{5^2-\left(\frac{z}{\tan(30°)}\right)^2}\right)^2}{2\cdot 5^2}\right)}{360°}\cdot\pi\cdot 5^2}_{A_{\text{sektori}}} - \underbrace{\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 5\cdot\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{5^2+5^2-\left(2\cdot\sqrt{5^2-\left(\frac{z}{\tan(30°)}\right)^2}\right)^2}{2\cdot 5^2}\right)\right)}_{A_{\text{kolmio}}}$$

missä siis sektorin keskuskulma $\cos^{-1}\left(\frac{5^2+5^2-\left(2\cdot\sqrt{5^2-\left(\frac{z}{\tan(30°)}\right)^2}\right)^2}{2\cdot 5^2}\right)$ on kosinilauseella saatu.

$$V = \int_0^{5\cdot\tan(30°)} dV = \int_0^{5\cdot\tan(30°)} A(z)\,dz = \ \dots = \frac{250}{3\sqrt{3}} \approx 48{,}1$$

$$\int_0^{5\cdot\tan(30)} \left(\frac{\cos^{-1}\left(\dfrac{2\cdot 5^2-\left(2\cdot\sqrt{25-\left(\frac{z}{\tan(30)}\right)^2}\right)^2}{2\cdot 5^2}\right)}{360}\cdot\pi\cdot 5^2-\frac{1}{2}\cdot 5^2\cdot\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{2\cdot 5^2-\left(2\cdot\sqrt{25-\left(\frac{z}{\tan(30)}\right)^2}\right)^2}{2\cdot 5^2}\right)\right)\right)dz \qquad \frac{250\cdot\sqrt{3}}{9}$$

2. Harjoitellaan kahden muuttujan funktion lokaalien ääriarvojen selvittämistä. Yhden muuttujan tapauksessa tuli hyödyntää derivaatan nollakohtia. Nyt menetelmä on hieman haastavampi.

Tehtävänä on määrittää funktion

$$f: f(x,y) = \frac{3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 18}{12 \cdot (1 + 4y^2)}$$

kriittiset pisteet ja lokaalit ääriarvot. Onko funktiolla globaalia ääriarvoa? Menetelmä on seuraava:

TEORIA ALKAA: Milloin funktiolla $f: f(x,y): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voi olla ääriarvopiste?

Osoittautuu (differentiaalilaskennan teorian kautta), että *välttämätön ehto* ääriarvopisteelle $a \in \mathbb{R}^2$ on gradientin häviäminen, eli $\nabla f(a) = 0$.

→ Mikä on gradientti? Se on vektori, joka muodostuu osittaisderivaatoista

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)$$

Siis ehto ääriarvopisteelle $a = (a_x, a_y) = (x, y)$ on

$$\frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial x} = 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial f(a_x, a_y)}{\partial y} = 0\,.$$

Huomautus

Pisteitä, joissa $\nabla f(a) = 0$ sanotaan *kriittisiksi pisteiksi*. Niitä ovat funktion min- ja max-pisteiden lisäksi funktion kuvaajapinnan ns. satulapisteet.

Seurauslause

Jälleen osoittautuu (differentiaalilaskennan teorian kautta), että kriittinen piste $a \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on funktiolle $f: f(x,y): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) Lokaali aito minimipiste, jos

$$\Delta_2(a) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} > 0$$

ii) Lokaali aito maksimipiste, jos

$$\Delta_2(a) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} < 0$$

iii) Satulapiste, jos $\Delta_2(a) < 0$.

Merkinnällä $\Delta_2(a)$ tarkoitetaan seuraavaa determinanttia pisteessä a:

$$\Delta_2(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y} \right)^2$$

TEORIA PÄÄTTYY!

Funktiolle f saadaan

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) = \left(\frac{x\cdot(x^2-x-2)}{4y^2+1}, \frac{-2y(3x^4-4x^3-12x^2+18)}{3(4y^2+1)^2}\right)$$

Ja yhtälö $\nabla f = 0$ on voimassa, kun

$$(x,y) = (-1,0) \quad \text{tai} \quad (x,y) = (0,0) \quad \text{tai} \quad (x,y) = (2,0)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3\cdot x^4-4\cdot x^3-12\cdot x^2+18}{12\cdot(1+4\cdot y^2)}\right) \qquad \frac{x\cdot(x^2-x-2)}{4\cdot y^2+1}$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{3\cdot x^4-4\cdot x^3-12\cdot x^2+18}{12\cdot(1+4\cdot y^2)}\right) \qquad \frac{-2\cdot y\cdot(3\cdot x^4-4\cdot x^3-12\cdot x^2+18)}{3\cdot(4\cdot y^2+1)^2}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(\frac{3\cdot x^4-4\cdot x^3-12\cdot x^2+18}{12\cdot(1+4\cdot y^2)}\right)=0\\ \frac{d}{dy}\left(\frac{3\cdot x^4-4\cdot x^3-12\cdot x^2+18}{12\cdot(1+4\cdot y^2)}\right)=0\end{cases},\{x,y\}\right)$$

$x=-1$ and $y=0$ or $x=0$ and $y=0$ or $x=2$ and $y=0$

Tarkastellaan näiden kriittisten pisteiden laatua:

Determinantiksi saadaan

$$\Delta_2(x,y) = \begin{vmatrix}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}\\ \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}\right)^2$$

$$= \left(\frac{3x^2-2x-2}{4y^2+1}\right)\cdot\left(\frac{2(12y^2-1)(3x^4-4x^3-12x^2+18)}{3(4y^2+1)^3}\right) - \left(\frac{-8x(x^2-x-2)y}{(4y^2+1)^2}\right)^2$$

$$= \frac{2\big(3x^6(4y^2-3)-6x^5(4y^2-3)-2x^4(60y^2-17)-32x^3+6x^2(92y^2-13)-36x(12y^2-1)-36(12y^2-1)\big)}{3(4y^2+1)^4}$$

Determinantin arvot kriittisissä pisteissä:

Pisteessä $(-1,0)$

$$\Delta_2(-1,0) = -26 < 0$$

Pisteessä (0,0)

$$\Delta_2(0,0) = 24 > 0$$

Pisteessä (2,0)

$$\Delta_2(2,0) = 56 > 0$$

Lisäksi pisteissä $(0,0)$ ja $(2,0)$ lausekkeen

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{3x^2-2x-2}{4y^2+1}$$

arvoksi saadaan: $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2} = -2 < 0$ ja $\frac{\partial^2 f(2,0)}{\partial x^2} = 6 > 0$.

Näin ollen piste $(-1,0)$ on satulapiste, $(0,0)$ on lokaali aito maksimipiste ja $(2,0)$ on lokaali aito minimipiste. Piste $(2,0)$ on myös globaali minimi, globaalia maksimia ei ole.

Laskuja:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{3\cdot x^4-4\cdot x^3-12\cdot x^2+18}{12\cdot(1+4\cdot y^2)}\right) \qquad \frac{3\cdot x^2-2\cdot x-2}{4\cdot y^2+1}$$

$$\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{3\cdot x^4-4\cdot x^3-12\cdot x^2+18}{12\cdot(1+4\cdot y^2)}\right) \qquad \frac{2\cdot(12\cdot y^2-1)\cdot(3\cdot x^4-4\cdot x^3-12\cdot x^2+18)}{3\cdot(4\cdot y^2+1)^3}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dy}\left(\frac{3\cdot x^4-4\cdot x^3-12\cdot x^2+18}{12\cdot(1+4\cdot y^2)}\right)\right) \qquad \frac{-8\cdot x\cdot(x^2-x-2)\cdot y}{(4\cdot y^2+1)^2}$$

$$\frac{3\cdot x^2-2\cdot x-2}{4\cdot y^2+1}\cdot\frac{2\cdot(12\cdot y^2-1)\cdot(3\cdot x^4-4\cdot x^3-12\cdot x^2+18)}{3\cdot(4\cdot y^2+1)^3}-\left(\frac{-8\cdot x\cdot(x^2-x-2)\cdot y}{(4\cdot y^2+1)^2}\right)^2$$

$$\frac{2\cdot(3\cdot x^6\cdot(4\cdot y^2-3)-6\cdot x^5\cdot(4\cdot y^2-3)-2\cdot x^4\cdot(60\cdot y^2-17)-32\cdot x^3+6\cdot x^2\cdot(92\cdot y^2-13)-36\cdot x\cdot(12\cdot y^2-1)-36\cdot(12\cdot y^2-1))}{3\cdot(4\cdot y^2+1)^4}$$

$$\frac{2\cdot(3\cdot x^6\cdot(4\cdot y^2-3)-6\cdot x^5\cdot(4\cdot y^2-3)-2\cdot x^4\cdot(60\cdot y^2-17)-32\cdot x^3+6\cdot x^2\cdot(92\cdot y^2-13)-36\cdot x\cdot(12\cdot y^2-1)-36\cdot(12\cdot y^2-1))}{3\cdot(4\cdot y^2+1)^4}\Big|x=-1 \qquad \frac{26\cdot(12\cdot y^2-1)}{(4\cdot y^2+1)^4}$$

$$\frac{26\cdot(12\cdot y^2-1)}{(4\cdot y^2+1)^4}\Big|y=0 \qquad -26$$

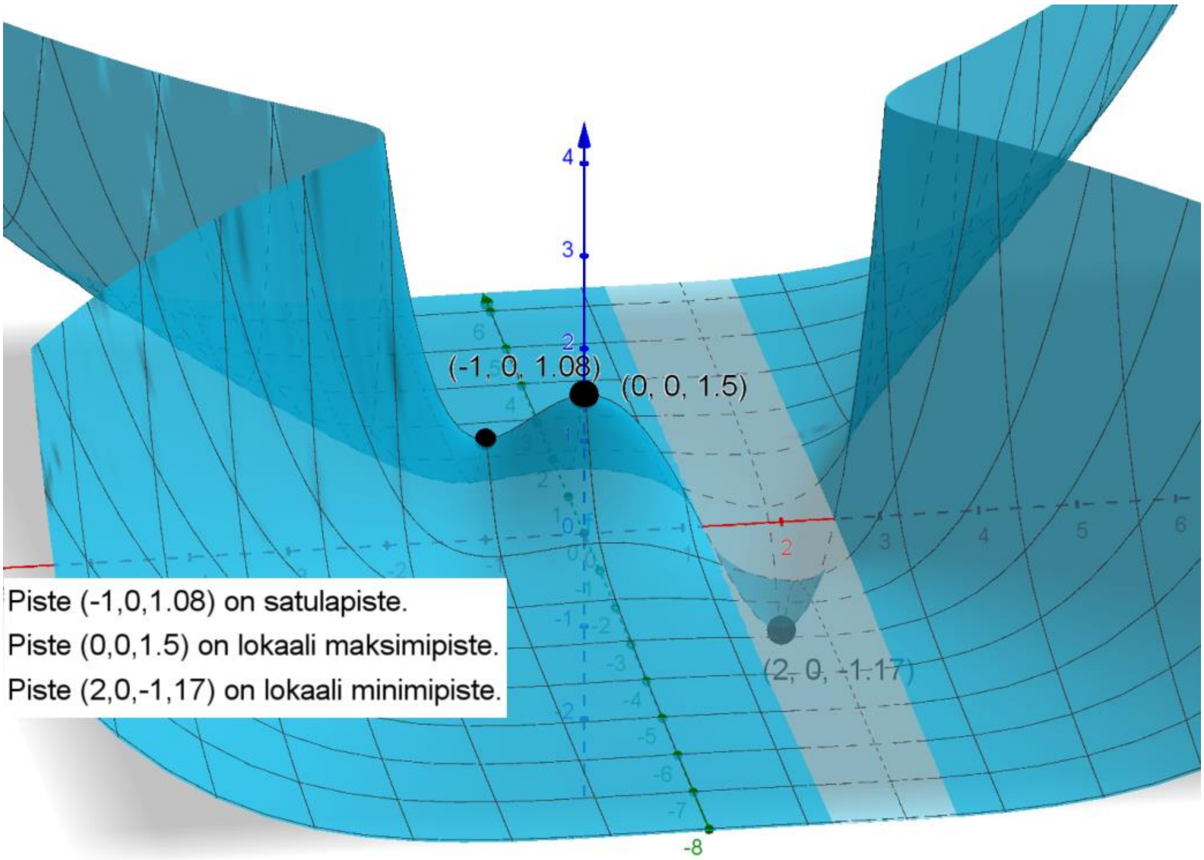
$$\frac{2\cdot(3\cdot x^6\cdot(4\cdot y^2-3)-6\cdot x^5\cdot(4\cdot y^2-3)-2\cdot x^4\cdot(60\cdot y^2-17)-32\cdot x^3+6\cdot x^2\cdot(92\cdot y^2-13)-36\cdot x\cdot(12\cdot y^2-1)-36\cdot(12\cdot y^2-1))}{3\cdot(4\cdot y^2+1)^4}\Big|x=0 \qquad \frac{-24\cdot(12\cdot y^2-1)}{(4\cdot y^2+1)^4}$$

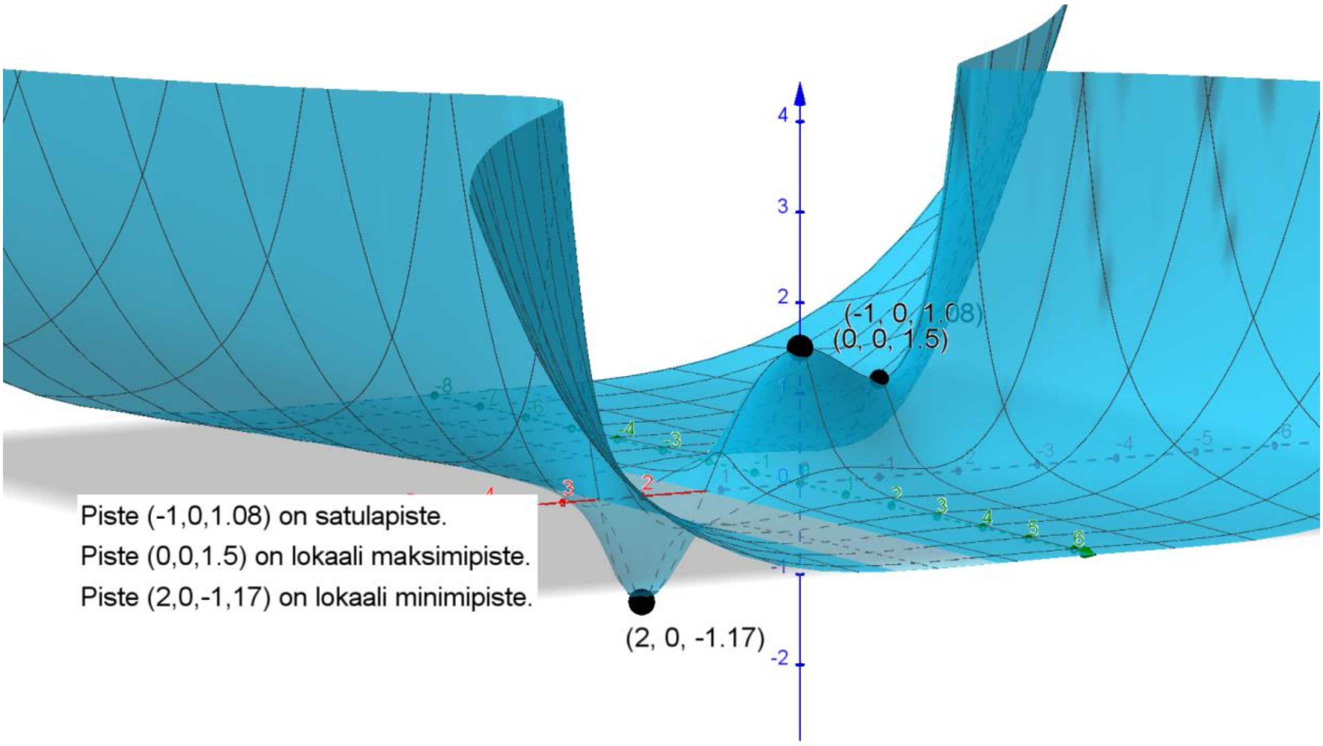
$$\frac{-24\cdot(12\cdot y^2-1)}{(4\cdot y^2+1)^4}\Big|y=0 \qquad 24$$

$$\frac{2\cdot(3\cdot x^6\cdot(4\cdot y^2-3)-6\cdot x^5\cdot(4\cdot y^2-3)-2\cdot x^4\cdot(60\cdot y^2-17)-32\cdot x^3+6\cdot x^2\cdot(92\cdot y^2-13)-36\cdot x\cdot(12\cdot y^2-1)-36\cdot(12\cdot y^2-1))}{3\cdot(4\cdot y^2+1)^4}\Big|x=2 \qquad \frac{-56\cdot(12\cdot y^2-1)}{(4\cdot y^2+1)^4}$$

$$\frac{-56\cdot(12\cdot y^2-1)}{(4\cdot y^2+1)^4}\Big|y=0 \qquad 56$$

$\frac{3\cdot x^2-2\cdot x-2}{4\cdot y^2+1}\vert x=0$	$\frac{-2}{4\cdot y^2+1}$
$\frac{-2}{4\cdot y^2+1}\vert y=0$	-2
$\frac{3\cdot x^2-2\cdot x-2}{4\cdot y^2+1}\vert x=2$	$\frac{6}{4\cdot y^2+1}$
$\frac{6}{4\cdot y^2+1}\vert y=0$	6





3. PYTHON…EHKÄ…joku vektorikulmajuttu…

Tallenna *omanimi_sukunimi* -muodossa PEDAn annettuun päivämäärään mennessä.