VASTAA YHTEENSÄ VIITEEN TEHTÄVÄÄN! MAOL JA LASKIN/LAS-KINOHJELMAT OVAT SALLITTUJA!

1. Ovatko väittämät oikein vai väärin? Riittää merkitä esim. a) – O, b) – V jne. (2p)

a) Suoran $\frac{x-5}{2} = \frac{y+4}{-3}, z = 5$ **suuntavektori on** $\bar{s} = -5\bar{i} + 4\bar{j} + 0\bar{k}$**?**

b) Tason yhtälö on $2x - 3y + 4z = -1$**. Vektori** $\bar{a} = -6\bar{i} + 9\bar{j} - 12\bar{k}$ **on kohtisuorassa tasoa vastaan.**

c) Suorien $\overline{OP_1} = (\bar{i} - 2\bar{j} - 14\bar{k}) + t(3\bar{i} - 6\bar{j} - 5\bar{k})$ **ja** $\overline{OP_2} = (2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}) + t(-5\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k})$ **välinen kulma on noin** $70°$**.**

d) Tason normaalivektori on $\bar{n} = -\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k}$ **ja tason eräs piste** $(2, 1, 1)$**. Tason yhtälö on tällöin** $-x + y - 3z = -4$**.**

e) Tasojen $2x - y - 2z + 6 = 0$ **ja** $x + 2y - 2z - 8 = 0$ **välinen kulma on noin** $36{,}6°$**.**

f) Suora $\bar{r} = (2\bar{i} - 3\bar{j} + 7\bar{k}) + t(2\bar{i} + \bar{j} - 3\bar{k})$ **leikkaa** yz**-tason pisteessä** $(0, -4, 10)$**.**

VASTAUKSET: **a)** Väärin **b)** Oikein **c)** Oikein **d)** Oikein **e)** Väärin **f)** Oikein

2. Ovatko pisteet $A = (2, -3, 0)$**,** $B = (3, -4, 2)$**,** $C = (5, -6, 3)$ **samalla suoralla? Etsi ensin ratkaisu Geogebralla ja perustele sitten laskennallisesti. Geogebra 0 p, perustelu 2 p. (2p)**

Ovat, jos on olemassa reaaliluku t siten, että

$$\overrightarrow{AB} = t \cdot \overrightarrow{AC}\,.$$

Vaihtoehtoisesti voidaan tutkia onko $\overrightarrow{AB} = t\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} = t\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BC} = t\overrightarrow{BA}$ jne., kunhan kaikki pisteet tulevat vähintään kerran mukaan. Koska

$$\overrightarrow{AB} = (3-2)\bar{\imath} + (-4-(-3))\bar{\jmath} + (2-0)\bar{k} = \bar{\imath} - \bar{\jmath} + 2\bar{k} \quad \text{ja}$$

$$\overrightarrow{AC} = (5-2)\bar{\imath} + (-6-(-3))\bar{\jmath} + (3-0)\bar{k} = 3\bar{\imath} - 3\bar{\jmath} + 3\bar{k},$$

niin saadaan yhtälö

$$\bar{\imath} - \bar{\jmath} + 2\bar{k} = t(3\bar{\imath} - 3\bar{\jmath} + 3\bar{k}) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = 3t, \quad -1 = -3t, \quad 2 = 3t$$

jolle ei löydy ratkaisua t (kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan $t = \frac{1}{3}$, mutta se ei toteuta viimeistä yhtälöä). Toisin sanoen kyseiset pisteet eivät ole samalla suoralla.

3. Tason suuntavektorit ovat $\overline{s_1} = 2\bar{\imath} + \bar{\jmath}$ ja $\overline{s_2} = \bar{\jmath} + 6\bar{k}$. Taso kulkee pisteen $(1, 2, -1)$ kautta. Määritä tason normaalimuotoinen yhtälö, määritä myös jokin tason normaalivektori sekä määritä pisteen $P = (11, -15, 5)$ etäisyys tasosta. Muista perustelut! Konetta saa eli pitää käyttää. (4p)

Koska tason vektoriyhtälö on

$$\bar{r} = (\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - \bar{k}) + t(2\bar{\imath} + \bar{\jmath} + 0\bar{k}) + s(0\bar{\imath} + \bar{\jmath} + 6\bar{k}), \qquad t, s \in \mathbb{R},$$

niin parametrimuodossa se on

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t + s \\ z = -1 + 6s \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad y = 2 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{6}(z+1),$$

josta $3x - 6y + z + 10 = 0$. Normaalivektoriksi saadaan siis esim. $\bar{n} = 3\bar{\imath} - 6\bar{\jmath} + \bar{k}$.

TAI vektorituloa käyttäen tason suuntavektoreista suoraan normaalivektori

$$\bar{n} = \overline{s_1} \times \overline{s_1} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \cdots = 6\bar{\imath} - 12\bar{\jmath} + 2\bar{k}$$

```
crossP([2  1  0],[0  1  6])                    [6  -12  2]
```

Josta tason yhtälö $6x - 12y + 2z + d = 0$, johon sijoittamalla tason pisteen koordinaatit saadaa d ratkaistua:

$$6 \cdot 1 - 12 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + d = 0 \quad \Longrightarrow \quad d = 20$$

Eli tason yhtälö $6x - 12y + 2z + 20 = 0$, joka on sama asi akuin $3x - 6y + z + 10 = 0$ (on vain kahdella jaettu)

Pisteen etäisyys tasosta:

Käytetään kaavaa $e = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, saadaan

$$e = \frac{|3 \cdot 11 - 6 \cdot (-15) + 1 \cdot 5 + 10|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 1^2}} = \frac{|138|}{\sqrt{46}} = 3\sqrt{46} \approx 20{,}346$$

TAI Olkoon tason piste $Q = (1 + 2t, 2 + t + s, -1 + 6s)$ pisteen $P = (11, -15{,}5)$ projektiopiste. Tällöin pätee

$$\begin{cases} \overline{PQ} \bullet \overline{s_1} = 0 \\ \overline{PQ} \bullet \overline{s_2} = 0 \end{cases}$$

Koska $\overline{PQ} = \cdots = (2t-10)\bar{\imath} + (t+s+17)\bar{\jmath} + (-6+6s)\bar{k}$, niin

$$\begin{cases} \overline{PQ} \bullet \overline{s_1} = (2t-10)\cdot 2 + (t+s+17)\cdot 1 + (-6+6s)\cdot 0 = 5t+s-3 = 0 \\ \overline{PQ} \bullet \overline{s_2} = (2t-10)\cdot 0 + (t+s+17)\cdot 1 + (-6+6s)\cdot 6 = t+37s-19 = 0 \end{cases}$$

Tälle ratkaisu on $t = 1/2$ ja $s = 1/2$.

$$\text{solve}\left(\begin{cases} 5\cdot t+s-3=0 \\ t+37\cdot s-19=0 \end{cases}, \{t,s\}\right) \qquad s=\frac{1}{2} \text{ and } t=\frac{1}{2}$$

Näin ollen piste $Q = (1+2\cdot 1/2, 2+1/2+1/2, -1+6\cdot 1/2) = (2{,}3{,}2)$, vektori

$$\overline{PQ} = (2\cdot 1/2 - 10)\bar{\imath} + (1/2+1/2+17)\bar{\jmath} + (-6+6\cdot 1/2)\bar{k} = 9\bar{\imath} + 18\bar{\jmath} - 3\bar{k}$$

ja pituus $|\overline{PQ}| = \sqrt{9^2+18^2+(-3)^2} = \sqrt{414} = 3\sqrt{46}$.

4. Määritä sellainen vakio a, että pisteiden $(-4,0,a)$ ja $(a,4,0)$ kautta kulkeva suora muodostaa tason $4x+3y-z+6=0$ kanssa 30 asteen kulman. Hyödynnä aineistot-osion liitetiedostoa *Tehtava4_testi4_ryhma1.ggb* ja etsi likiarvo(t) ja sitten perustele hyvin. (4+1p)

Muodostetaan pisteiden $(-4{,}0,a)$ ja $(a,4{,}0)$ kautta kulkevan suoran suuntavektori:

$$\bar{s} = \big(a-(-4)\big)\bar{\imath} + (4-0)\bar{\jmath} + (0-a)\bar{k} = (a+4)\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} - a\bar{k}.$$

Tason $4x+3y-z+6=0$ eräs normaalivektori on

$$\bar{n} = 4\bar{\imath} + 3\bar{\jmath} - \bar{k}.$$

Koska suoran ja tason välinen kulma on $30°$, niin tällöin suoran suuntavektorin $\bar{s}$ ja normaalivektorin $\bar{n}$ välisen kulman $\sphericalangle(\bar{s},\bar{n})$ tai kulman suplementtikulman $180° - \sphericalangle(\bar{s},\bar{n})$ on oltava $90°-30° = 60°$. Molemmissa tapauksissa pätee $\cos 60 = \left|\frac{\bar{s}\bullet\bar{n}}{|\bar{s}||\bar{n}|}\right|$. Koska $\cos 60 = 0{,}5$, niin

$$\frac{1}{2} = \cos 60 = \left|\frac{\bar{s}\bullet\bar{n}}{|\bar{s}||\bar{n}|}\right| = \left|\frac{\big((a+4)\bar{\imath}+4\bar{\jmath}-a\bar{k}\big)\bullet\big(4\bar{\imath}+3\bar{\jmath}-\bar{k}\big)}{\sqrt{(a+4)^2+4^2+(-a)^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2+(-1)^2}}\right|$$

$$= \left|\frac{(a+4)\cdot 4 + 4\cdot 3 + (-a)\cdot(-1)}{\sqrt{a^2+8a+16+16+a^2}\cdot\sqrt{26}}\right| = \left|\frac{5a+28}{\sqrt{2a^2+8a+32}\cdot\sqrt{26}}\right|.$$

Yhtälö

$$\frac{1}{2} = \left|\frac{5a+28}{\sqrt{2a^2+8a+32}\cdot\sqrt{26}}\right|$$

on hyvin määritelty, sillä lauseke $2a^2 + 8a + 32 > 0$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$. Saadaan kaksi tapausta riippuen siitä onko itseisarvon osoittajan lauseke $5a + 28$ positiivista vai negatiivista.

TAPAUS 1: kun $\boldsymbol{a < -\frac{28}{5} = -5,6}$

Tällöin yllä oleva yhtälö tulee muotoon

$$\frac{1}{2} = \frac{-5a - 28}{\sqrt{2a^2 + 8a + 32} \cdot \sqrt{26}}.$$

Korottamalla molemmat puolet toiseen (ovat nyt positiivisia), saadaan

$$\frac{1}{4} = \frac{25a^2 + 280a + 28^2}{(2a^2 + 8a + 32) \cdot 26} \quad \Leftrightarrow \quad 52a^2 + 208a + 832 = 100a^2 + 1120a + 3136$$

$$\Leftrightarrow \quad 48a^2 + 912a + 2304 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{-912 \pm \sqrt{912^2 - 4 \cdot 48 \cdot 2304}}{2 \cdot 48} = \frac{-912 \pm \sqrt{389376}}{96}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = \frac{-912 + \sqrt{389376}}{96} = \frac{-912 + 624}{96} = \frac{-288}{96} = -3 \\ a_2 = \frac{-912 - \sqrt{389376}}{96} = \frac{-912 - 624}{96} = \frac{-1536}{96} = -16 \end{cases}.$$

Näistä arvoista vain $a_2 = -16$ täyttää ehdon $a < -\frac{28}{5} = -5{,}6$.

TAPAUS 2: kun $\boldsymbol{a > -\frac{28}{5} = -5,6}$

Tällöin yllä oleva yhtälö tulee muotoon

$$\frac{1}{2} = \frac{5a + 28}{\sqrt{2a^2 + 8a + 32} \cdot \sqrt{26}}.$$

Korottamalla molemmat puolet toiseen (ovat nyt positiivisia), saadaan

$$\frac{1}{4} = \frac{25a^2 + 280a + 28^2}{(2a^2 + 8a + 32) \cdot 26} \quad \Leftrightarrow \quad 52a^2 + 208a + 832 = 100a^2 + 1120a + 3136$$

$$\Leftrightarrow \quad 48a^2 + 912a + 2304 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \frac{-912 \pm \sqrt{912^2 - 4 \cdot 48 \cdot 2304}}{2 \cdot 48} = \frac{-912 \pm \sqrt{389376}}{96}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} a_1 = \frac{-912 + \sqrt{389376}}{96} = \frac{-912 + 624}{96} = \frac{-288}{96} = -3 \\ a_2 = \frac{-912 - \sqrt{389376}}{96} = \frac{-912 - 624}{96} = \frac{-1536}{96} = -16 \end{cases}.$$

Näistä arvoista vain $a_1 = -3$ täyttää ehdon $a > -\frac{28}{5} = -5{,}6$.

Ratkaisuiksi tuli kuitenkin molemmat a:n arvot

$$a_1 = -3, \qquad a_2 = -16.$$

TARKISTUS:

Kun $\boldsymbol{a = -3}$, niin pisteet ovat $(-4,0,-3)$ ja $(-3,4,0)$ ja näiden pisteiden kautta kulkevan suoran suuntavektori:

$$\bar{s} = \big(-3-(-4)\big)\bar{\imath} + (4-0)\bar{\jmath} + \big(0-(-3)\big)\bar{k} = \bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 3\bar{k}.$$

Tällöin suuntavektorin ja normaalin välinen kulma

$$\cos\beta = \left|\frac{\bar{s}\bullet\bar{n}}{|\bar{s}||\bar{n}|}\right| = \left|\frac{(\bar{\imath}+4\bar{\jmath}+3\bar{k})\bullet(4\bar{\imath}+3\bar{\jmath}-\bar{k})}{\sqrt{1^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2+(-1)^2}}\right| = \frac{4+12-3}{26} = \frac{13}{26} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \cos\beta = 0{,}5 \quad\Rightarrow\quad \beta = 60^\circ \ \Rightarrow\ \alpha = 90^\circ - \beta = 30^\circ, \qquad \text{OK}$$

Kun $\boldsymbol{a = -16}$, niin pisteet ovat $(-4,0,-16)$ ja $(-16,4,0)$ ja näiden pisteiden kautta kulkevan suoran suuntavektori:

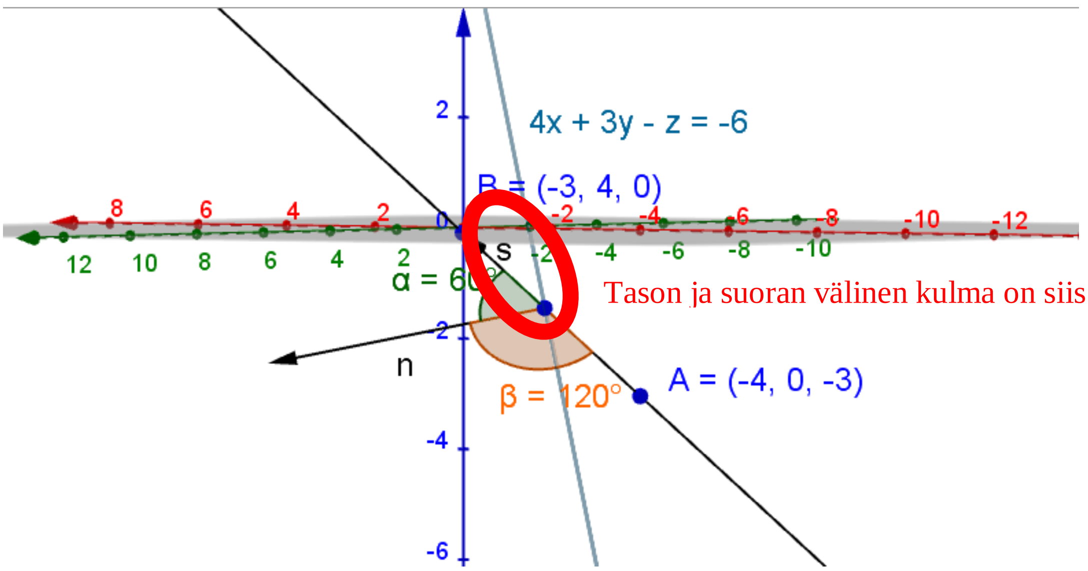
$$\bar{s} = \big(-16-(-4)\big)\bar{\imath} + (4-0)\bar{\jmath} + \big(0-(-16)\big)\bar{k} = -12\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 16\bar{k}.$$

Tällöin suuntavektorin ja normaalin välinen kulma

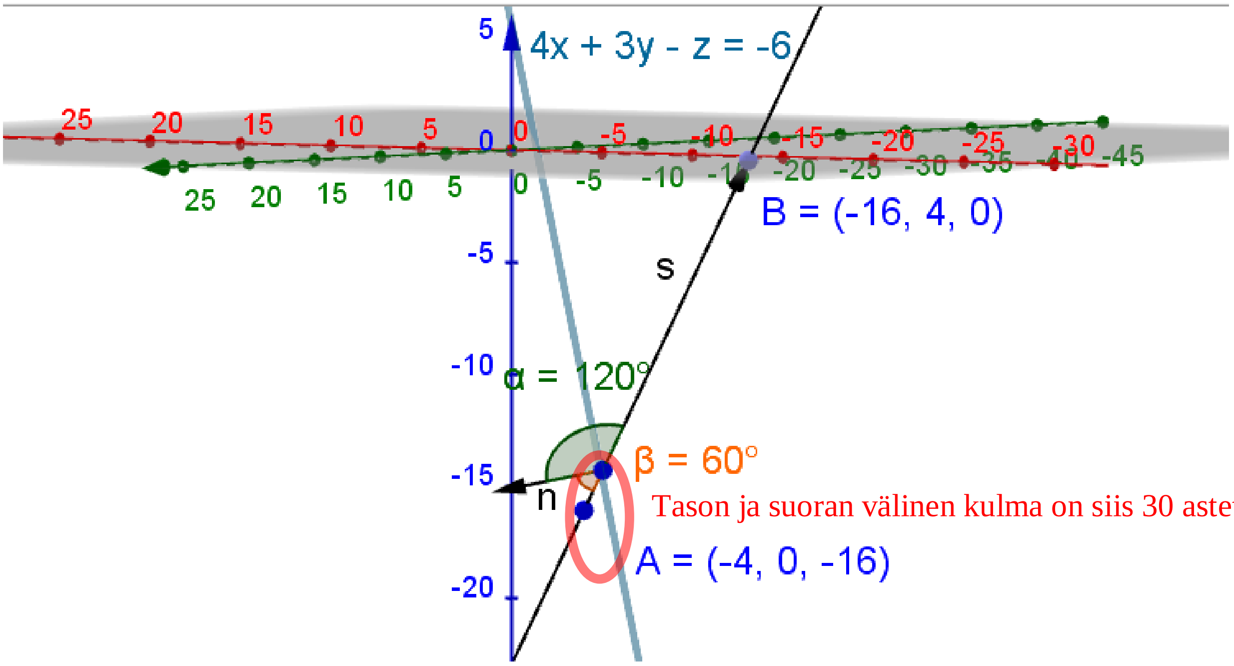
$$\cos\beta = \left|\frac{\bar{s}\bullet\bar{n}}{|\bar{s}||\bar{n}|}\right| = \left|\frac{(-12\bar{\imath}+4\bar{\jmath}+16\bar{k})\bullet(4\bar{\imath}+3\bar{\jmath}-\bar{k})}{\sqrt{(-12)^2+4^2+16^2}\cdot\sqrt{4^2+3^2+(-1)^2}}\right| = \frac{-48+12-16}{\sqrt{416}\cdot\sqrt{26}} = \frac{-52}{104} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \cos\beta = -0{,}5 \quad\Rightarrow\quad \beta = 60^\circ \ \Rightarrow\ \alpha = 90^\circ - \beta = 30^\circ, \qquad \text{OK}$$

Tilanne, kun $a = -3$.



Tilanne, kun $a = -16$.



Tason ja suoran välinen kulma on siis 30 astetta.

5. a) Määritä $|\bar{a} + 2\bar{b}|$, kun $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 3$ ja $|2\bar{a} + 3\bar{b}| = 7$.

b) Suora a kulkee pisteen $P = (55, 22, 37)$ kautta vektorin $\bar{s} = -2\bar{\imath} + \bar{\jmath} - 2\bar{k}$ suuntaisesti. Suora b kulkee pisteiden $A = (-5, 2, 7)$ ja $B = (1, 4, 10)$ kautta. Määritä suorien leikkauspiste ja suorien välinen kulma asteen kymmenesosan tarkkuudella. Mikä on suoran a ja xy-tason välinen kulma?

a) Koska pistetuloa hyödyntäen

$$|2\bar{a} + 3\bar{b}|^2 = (2\bar{a} + 3\bar{b}) \bullet (2\bar{a} + 3\bar{b}) = 2\bar{a} \bullet 2\bar{a} + 2\bar{a} \bullet 3\bar{b} + 3\bar{b} \bullet 2\bar{a} + 3\bar{b} \bullet 3\bar{b}$$

$$= 4 \cdot \underbrace{\bar{a} \bullet \bar{a}}_{= |\bar{a}|^2} + 6 \cdot \bar{a} \bullet \bar{b} + 6 \cdot \bar{b} \bullet \bar{a} + 9 \cdot \underbrace{\bar{b} \bullet \bar{b}}_{= |\bar{b}|^2} = 4 \cdot 2^2 + 12 \cdot \bar{a} \bullet \bar{b} + 9 \cdot 3^2 = 7^2$$

niin

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = \frac{49 - 16 - 81}{12} = \frac{-48}{12} = -4$$

Näin ollen

$$|\bar{a} + 2\bar{b}|^2 = (\bar{a} + 2\bar{b}) \bullet (\bar{a} + 2\bar{b}) = \bar{a} \bullet \bar{a} + \bar{a} \bullet 2\bar{b} + 2\bar{b} \bullet \bar{a} + 2\bar{b} \bullet 2\bar{b}$$

$$= \underbrace{\bar{a} \bullet \bar{a}}_{= |\bar{a}|^2} + 2 \cdot \bar{a} \bullet \bar{b} + 2 \cdot \bar{b} \bullet \bar{a} + 4 \cdot \underbrace{\bar{b} \bullet \bar{b}}_{= |\bar{b}|^2}$$

$$= 2^2 + 4 \cdot \underbrace{\bar{a} \bullet \bar{b}}_{=-4} + 4 \cdot 3^2 = 4 + 4 \cdot (-4) + 36 = 24,$$

josta $|\bar{a} + 2\bar{b}| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

b) Suora a: $\overline{OP} = \left(55\bar{\imath} + 22\bar{\jmath} + 37\bar{k}\right) + t\underbrace{\left(-2\bar{\imath} + \bar{\jmath} - 2\bar{k}\right)}_{=\bar{s}} = (55 - 2t)\bar{\imath} + (22 + t)\bar{\jmath} +$

$(37 - 2t)\bar{k},\ t \in \mathbb{R}$

Suora b: $\overline{OP} = \left(-5\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 7\bar{k}\right) + s\underbrace{\left(6\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} + 3\bar{k}\right)}_{=\overline{AB}} = (-5 + 6s)\bar{\imath} + (2 + 2s)\bar{\jmath} +$

$(7 + 3s)\bar{k},\ s \in \mathbb{R}$

Näiden suorien leikkauspisteessä koordinaatit on oltava samat. Muodostuu yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} 55 - 2t = -5 + 6s \\ 22 + t = 2 + 2s \\ 37 - 2t = 7 + 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 55 - 4s - 40 = -5 + 6s \\ t = 2s - 20 \ \updownarrow \text{sij.} \\ 37 - 4s - 40 = 7 + 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -10s = -100 \\ -7s = -70 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c} s = 10 \\ \text{ja } t = 0 \end{array}$$

Eli leikkauspiste on $(55, 22, 37)$. Leikkauskulmaksi saadaan

$$\cos(\bar{s}, \overline{AB}) = \left|\frac{\bar{s} \bullet \overline{AB}}{|\bar{s}||\overline{AB}|}\right| = \left|\frac{-2 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}}\right| = \frac{|-16|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{49}} = \frac{16}{21}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(\bar{s}, \overline{AB}) = 40{,}367\ldots° \approx 40{,}4°$$

Suoran a ja xy-tason väliseksi kulmaksi saadaan, kun havaitaan, että $\bar{k}$ on eräs xy-tason normaalivektori.

$$\cos(\bar{s}, \bar{n}) = \left|\frac{\bar{s} \bullet \bar{n}}{|\bar{s}||\bar{n}|}\right| = \left|\frac{-2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}}\right| = \frac{|-2|}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{1}} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \sphericalangle(\bar{s}, \bar{n}) = 48{,}189\ldots° \quad \Rightarrow \quad \sphericalangle(\text{suora } a, xy - \text{taso}) = 90° - 48{,}189\ldots° = 41{,}810\ldots° \approx 41{,}8°$$

6. Suihkukone on pisteessä $(6, 4, 7)$ ja se lentää vektorin $-3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - \bar{k}$ suuntaan. Ukkospilven etureuna on pisteiden $(-3, -2, 9)$, $(2, 4, 8)$ ja $(5, 2, 10)$ määräämän tason suuntainen. Kuinka pitkän matkan kone lentää ennen kuin se osuu ukkospilveen? Koordinaatiston yksikkö vastaa kilometriä.

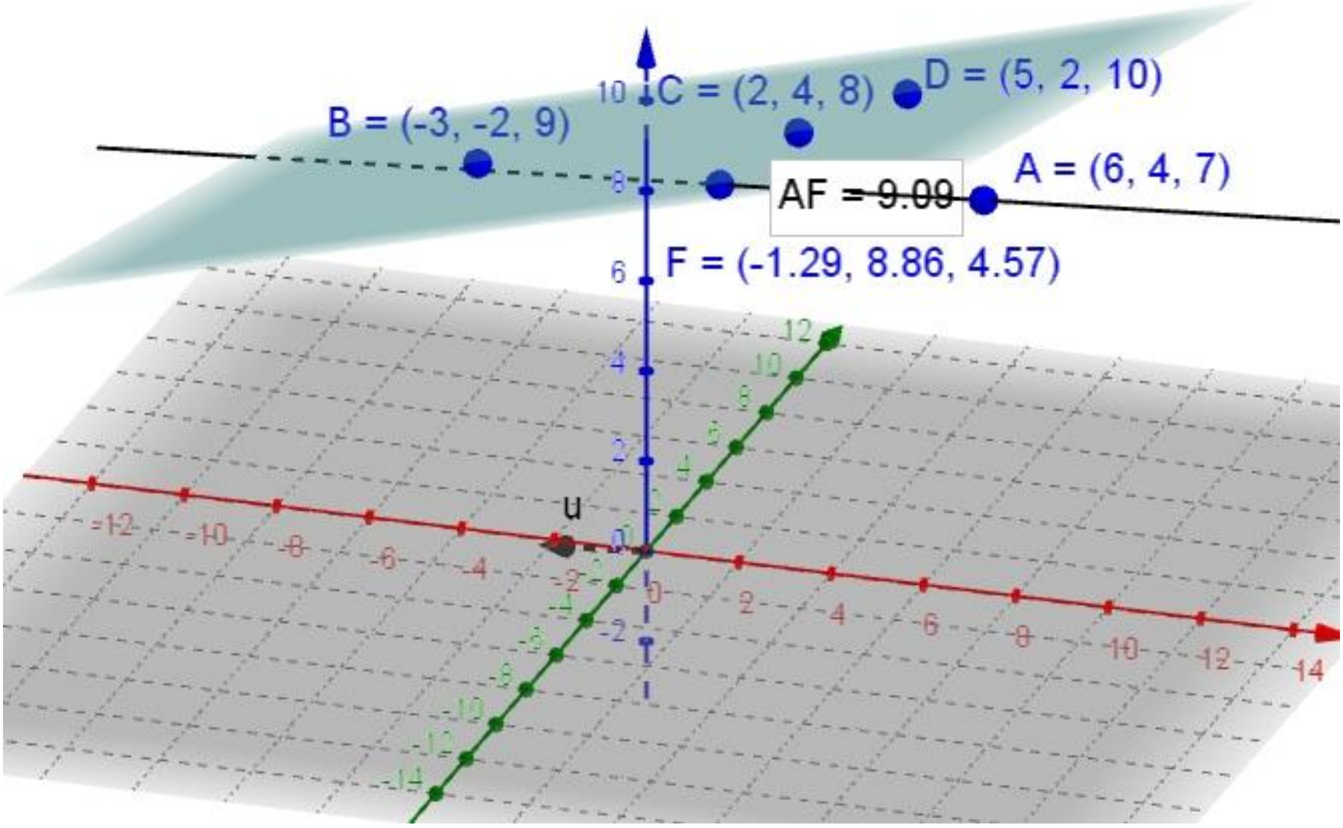
Ratkaise tehtävä

a) Ohjelmistoja käyttäen (kopioi paperille tarvittavat tiedot ja piirrokset, jos vastaat paperille) (2p)

ja

b) Laskennallisesti, eli välivaiheet näkyviin. (4p)

a) 1) Sijoitetaan tunnetut pisteet koordinaatstoon ja muodostetaan lentokoneen lentämä suora sekä ukkosrin-taman taso. **2)** Määritetään suoran ja tason leikkaupiste sekä lasketaan etäisyys. katso kuva alla.



b) Suunnitelma: Muodostetaan suoran koordinaattimuotoinen yhtälö sekä tason normaalimuotoinen yhtälö. Sijoitetaan suoran koordinaatit tason yhtälöön, ratkaistaan t ja määritetään leikkauspiste. Lopuksi määritetään pisteiden välinen pituus.

Suoran yhtälö:

Olkoon piste $P = (x, y, z)$ suoran mielivaltainen piste. Tällöin on olemassa $t \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\overrightarrow{OP} = 6\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 7\bar{k} + t\left(-3\bar{\imath} + 2\bar{\jmath} - \bar{k}\right) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 6 - 3t \\ y = 4 + 2t \\ z = 7 - t \end{cases}.$$

Tason yhtälö:

Tason suuntavektoreiksi voidaan valita

$$\bar{u} = \left(2 - (-3)\right)\bar{\imath} + \left(4 - (-2)\right)\bar{\jmath} + (8 - 9)\bar{k} = 5\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - \bar{k},$$

$$\bar{v} = \left(5 - (-3)\right)\bar{\imath} + \left(2 - (-2)\right)\bar{\jmath} + (10 - 9)\bar{k} = 8\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + \bar{k}\,.$$

Olkoon piste $Q = (x, y, z)$ tason mielivaltainen piste. Tällöin on olemassa $r, s \in \mathbb{R}$ siten, että

$$\overrightarrow{OQ} = 2\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + 8\bar{k} + r\left(5\bar{\imath} + 6\bar{\jmath} - \bar{k}\right) + s\left(8\bar{\imath} + 4\bar{\jmath} + \bar{k}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 + 5r + 8s \\ y = 4 + 6r + 4s \\ z = 8 - r + s \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} r = \dfrac{1}{5}(x - 2 - 8s) \\ r = \dfrac{1}{6}(y - 4 - 4s) \\ r = 8 + s - z \quad \uparrow \text{sij.} \end{cases}$$

Kahdesta alimmaisesta yhtälöstä saadaan

$$r = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}(y - 4 - 4s) = 8 + s - z \quad \Rightarrow \ \dots \ \Rightarrow s = \frac{1}{10}(y - 52 + 6z)\,.$$

Vastaavasti kahdesta ylimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$r = r \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{6}(y - 4 - 4s) = \frac{1}{5}(x - 2 - 8s) \quad \Rightarrow \ \dots \ \Rightarrow s = \frac{1}{28}(6x + 8 - 5y)\,.$$

Yhdistetään tiedot, saadaan tasolle normaalimuotoinen yhtälö

$$s = s \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{10}(y - 52 + 6z) = \frac{1}{28}(6x + 8 - 5y) \quad \Rightarrow \ \dots \ \Rightarrow 60x - 78y - 168z + 1536 = 0\,.$$

Näin on saatu tason normaalimuotoinen yhtälö, sijoitetaan siihen suoran koordinaatit ja ratkaistaan t, siis

$$60(6 - 3t) - 78(4 + 2t) - 168(7 - t) + 1536 = 0$$

$$360 - 180t - 312 - 156t - 1176 + 168t + 1536 = 0$$

$$-168t + 408 = 0$$

$$t = \frac{408}{168} = \frac{17}{7}$$

Suoran ja tason leikkauspiste on

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x = 6 - 3 \cdot \dfrac{17}{7} = -\dfrac{9}{7} \\ y = 4 + 2 \cdot \dfrac{17}{7} = \dfrac{62}{7} \\ z = 7 - \dfrac{17}{7} = \dfrac{32}{7} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{9}{7}, \frac{62}{7}, \frac{32}{7}\right)$$

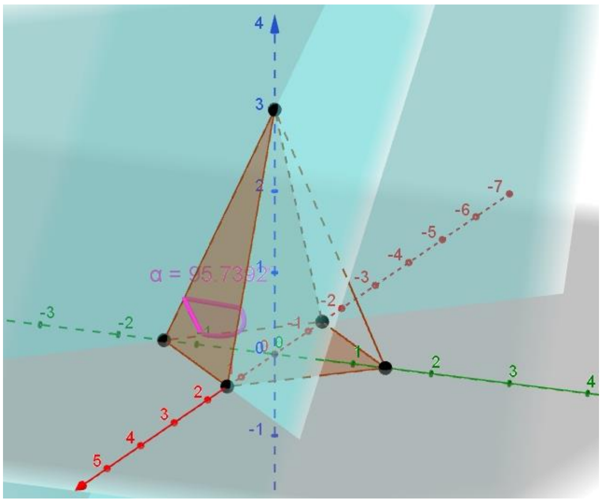
Halutut pisteet ovat siis $(6,4,7)$ ja $\left(-\frac{9}{7}, \frac{62}{7}, \frac{32}{7}\right)$. Näiden välinen etäisyys on

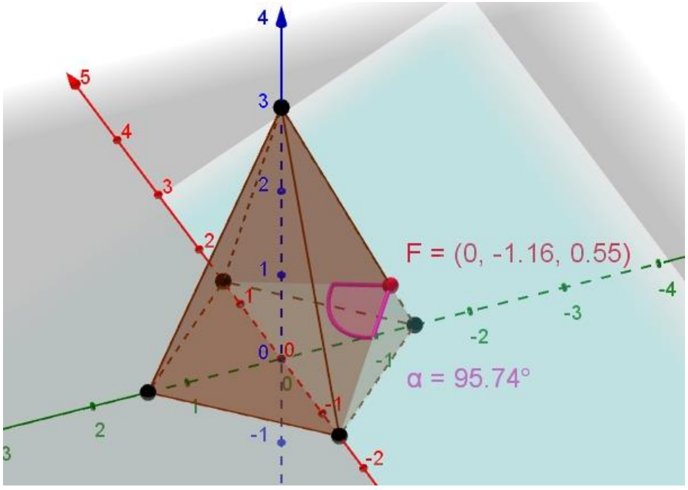
$$\sqrt{\left(6 + \frac{9}{7}\right)^2 + \left(4 - \frac{62}{7}\right)^2 + \left(7 - \frac{32}{7}\right)^2} = \sqrt{\frac{578}{7}} = \frac{17\sqrt{14}}{7} \approx 9{,}08688\,.$$

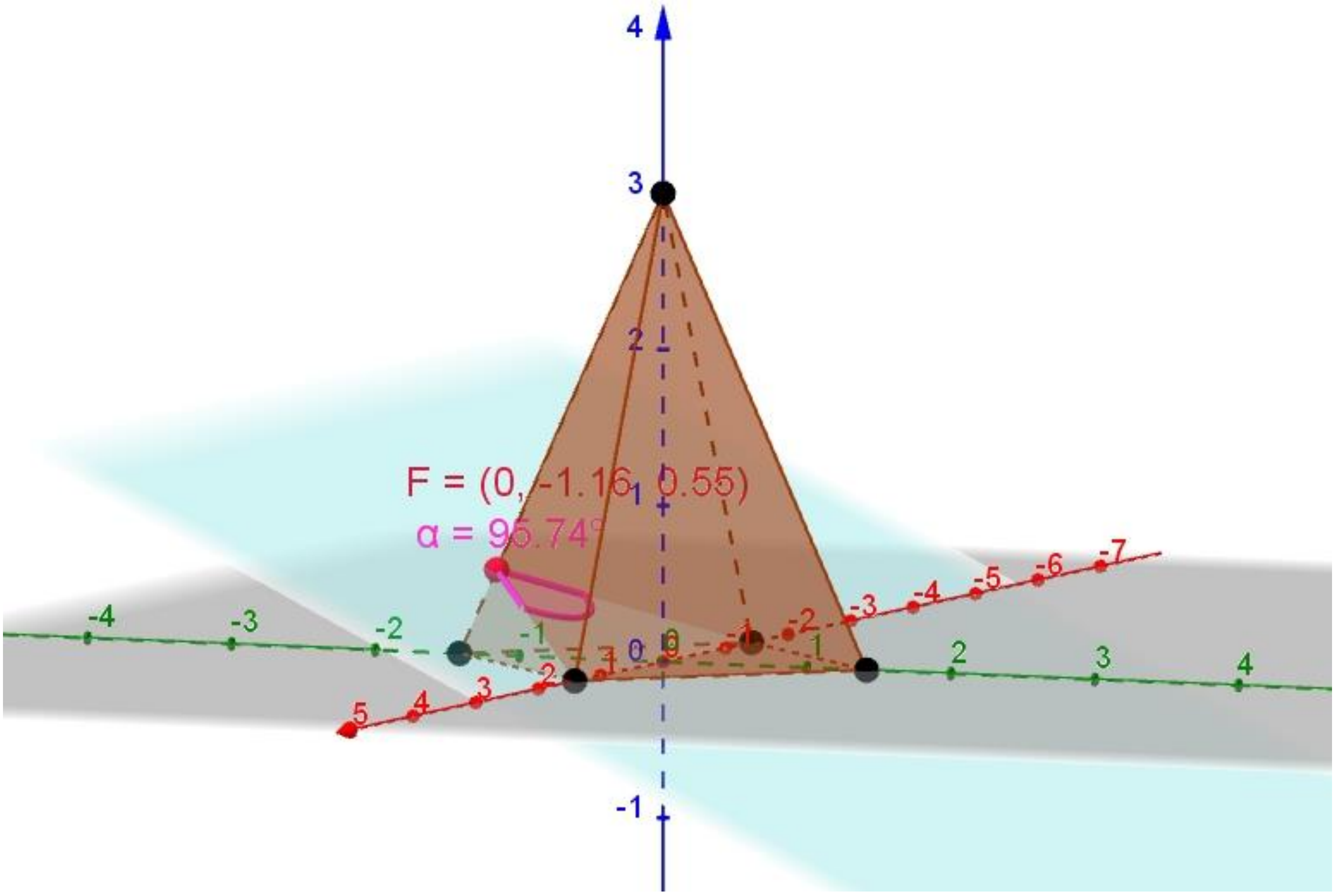
Vastaus: noin 9,1km.

7. Suoran neliöpohjaisen pyramidin korkeus on 3 ja pohjaneliön pituus on 2, katso materiaalit-osiosta geogebratiedosto *tehtävä 7*. Laske analyyttisesti (välivaiheet näkyviin) asteen kymmenesosan tarkkuu-della pyramidin kahden vierekkäisen sivutahkon välisen kulman suuruus. OHJE: Merkitse ensin geogebralla kysytty kulma näkyviin (riittävän isokokoisena) ja kirjoita ajatuk-sesi kuinka lähdet tehtävää ratkaisemaan. (1p) Ratkaise sitten tehtävä. (5p)

Geogebralla piirretty tilanne:







Ratkaisuajatus on seuraava. Muodostetaan tahkojen tiedoista (pisteet) tahkoja vastaavien tasojen yhtälöt, jotka muutettuna normaalimuotoon antavat tasojen normaalivektorit. Lasketaan tahkoja vastaavien tasojen välinen kulma normaalivektoreiden avulla. Koska tämä kulma ei kuitenkaan ole (katso geogebratiedosto) tahkojen välinen kulma, vaan sen suplementtikulma, niin lopuksi vähennetään 180°. Siis

$$\text{tahkojen välinen kulma} = 180° - \text{tahkoja vastaavien tasojen välinen kulma.}$$

Tahko 1, eli tason 1 yhtälö:

$$\overrightarrow{OP} = 3\bar{k} + t(\sqrt{2}\bar{\imath} - 3\bar{k}) + s(\sqrt{2}\bar{\jmath} - 3\bar{k}), \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 + \sqrt{2}t \\ y = 0 \qquad + \sqrt{2}s \\ z = 3 - 3t - 3s \end{cases} \Rightarrow \; z = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}}x - \frac{3}{\sqrt{2}}y \;\Rightarrow\; \frac{3}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\sqrt{2}}y + z - 3 = 0$$

Tason 1 normaalivektoriksi saadaan näin ollen

$$\bar{n}_1 = \frac{3}{\sqrt{2}}\bar{\imath} + \frac{3}{\sqrt{2}}\bar{\jmath} + \bar{k}\,.$$

Tahko 2, eli tason 2 yhtälö:

$$\overrightarrow{OP} = 3\bar{k} + t(\sqrt{2}\bar{\jmath} - 3\bar{k}) + s(-\sqrt{2}\bar{\imath} - 3\bar{k}), \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \qquad - \sqrt{2}s \\ y = 0 + \sqrt{2}t \\ z = 3 - 3t - 3s \end{cases} \Rightarrow \; z = 3 - \frac{3}{\sqrt{2}}y + \frac{3}{\sqrt{2}}x \;\Rightarrow\; -\frac{3}{\sqrt{2}}x + \frac{3}{\sqrt{2}}y + z - 3 = 0$$

Tason 2 normaalivektoriksi saadaan näin ollen

$$\bar{n}_2 = -\frac{3}{\sqrt{2}}\bar{\imath} + \frac{3}{\sqrt{2}}\bar{\jmath} + \bar{k}\,.$$

Tasojen väliseksi kulmaksi saadaan

$$\cos(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \left|\frac{\bar{n}_1 \bullet \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}\right| = \left|\frac{\frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) + \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}} + 1 \cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1^2}}\right| = \frac{|1|}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{10}$$

$$= 0{,}1$$

$$\Rightarrow \quad \sphericalangle(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 84{,}260\ldots° \approx 84{,}3°$$

Lopuksi kysytty kulma

$$180° - 84{,}260\ldots° = 95{,}739\ldots° \approx 95{,}7°\,.$$

TAI (kun pyramidin pohjaneliön kärjet ovat $(\pm 1, \pm 1, 0)$.)

Tahko 1, eli tason 1 yhtälö:

$$\overrightarrow{OP} = 3\bar{k} + t(\bar{\imath} + \bar{\jmath} - 3\bar{k}) + s(\bar{\imath} - \bar{\jmath} - 3\bar{k}), \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 + t + s \\ y = 0 + t - s \\ z = 3 - 3t - 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} t = 1/2(x+y) \searrow \text{sij.} \\ s = 1/2(x-y) \searrow \text{sij.} \\ z = 3 - 3/2(x+y) - 3/2(x-y) \end{array} \Rightarrow z = 3 - 3x$$

Josta edelleen $3x + z - 3 = 0 \Rightarrow \bar{n}_1 = 3\bar{\imath} + \bar{k}$.

Tahko 2, eli tason 2 yhtälö:

$$\overrightarrow{OP} = 3\bar{k} + t(\bar{\imath} + \bar{\jmath} - 3\bar{k}) + s(-\bar{\imath} + \bar{\jmath} - 3\bar{k}), \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 + t - s \\ y = 0 + t + s \\ z = 3 - 3t - 3s \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} t = 1/2(x+y) \searrow \text{sij.} \\ s = 1/2(y-x) \searrow \text{sij.} \\ z = 3 - 3/2(x+y) - 3/2(y-x) \end{array} \Rightarrow z = 3 - 3y$$

Josta edelleen $3y + z - 3 = 0 \Rightarrow \bar{n}_2 = 3\bar{\jmath} + \bar{k}$. Lopuksi

$$\cos(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \left|\frac{\bar{n}_1 \bullet \bar{n}_2}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|}\right| = \left|\frac{3 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1}{\sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$