Käänteisfunktion derivaatta

DIFFERENTIAALI- JA INTEGRALILAKSENNAN JATKOKURSSI, MAA13

Jos derivoituvat funktiot f ja g ovat toistensa käänteisfunktioita, niin

$$g\big(f(x)\big) = x, \qquad \forall x \in \mathcal{M}_f \,.$$

Derivoidaan (ilman mitään erityistä syytä) puolittain, saadaan

$$g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = 1 \overbrace{\Rightarrow}^{\text{jaetaan } f'\text{:lla}} g'\big(f(x)\big) = \frac{1}{f'(x)} \,.$$

Lause Olkoon funktio f derivoituva ja olkoon sillä käänteisfunktio $g = f^{-1}$. Jos $y = f(x)$ ja $f'(x) \neq 0$, niin g on derivoituva kohdassa y ja pätee

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \,.$$

Eli

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \,.$$

Tulkinta: Funktion ja käänteisfunktion vastinkohdissa (y ja x, joille $y = f(x)$ ja $x = g(y)$) lasketut derivaatat ovat toistensa käänteislukuja.

Huomautus 1 Koska toisaalta $x = g(y)$, niin

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'\big(g(y)\big)}, \qquad f'\big(g(y)\big) \neq 0 \,.$$

Huomautus 2 Koska $y = f(x)$, niin $\frac{dy}{dx} = y'(x)$, josta $x = f^{-1}(y)$ ja $x'(y) = \frac{dx}{dy}$. Eli

$$x'(y) = \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{y'(x)} \,.$$

Esimerkki 1 Oletetaan, että derivoituvalla f:llä on käänteisfunktio g ja että $f(-1) = 2$, $f'(-1) = 3$. Määritä $g'(2)$.
Nyt käänteisfunktion derivoimissäännön nojalla

$$g'(2) = \frac{1}{f'(x)}$$

sellaiselle x, jolle $f(x) = 2$. Tiedetään, että $f(-1) = 2$. Siis

$$g'(2) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{3} \,.$$

Esimerkki 2 **T − 50** Annettuna on funktio f: $f(x) = x^7 + 7x - 5$.

Osoita, että f:llä on käänteisfunktio ja määritä $(f^{-1})'(3)$.

Ratkaisu Koska $f'(x) = 7x^6 + 7 = 7(x^6 + 1) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, niin f on aidosti kasvava (monotoninen), siis on olemassa **Lause**en nojalla käänteisfunktio $g = f^{-1}$. Saadaan

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(x)}\ ,$$

sellaiselle x, jolle $f(x) = 3$. Pitää siis ratkaista yhtälö

$$x^7 + 7x - 5 = 3.$$

$$\Longrightarrow \qquad x^7 + 7x = 8 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

Onko muita ratkaisuja? Ei ole, sillä f oli (ja on edelleen) aidosti monotoninen. Näin ollen

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{7 \cdot 1^6 + 7} = \frac{1}{14}\ .$$

Huom. Ei kannata yrittää laskea suoraan käänteisfunktion derivaatan arvoa $(f^{-1})'(3)$, vaan edellä käydyllä tavalla.

Esimerkki 2 **T − 55 a)** Muodosta käänteisfunktion derivoimissäännön avulla $\frac{dy}{dx}$, kun $y = \sqrt{x},\ x > 0$.

Ratkaisu Kun $y = y(x) = \sqrt{x},\ x > 0$, niin $x = x(y) = x^2$.
Tällöin

$$\frac{dx}{dy} = 2x \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{1}{2y} \overset{\substack{\text{koska} \\ y=\sqrt{x}}}{\widehat{=}} \frac{1}{2\sqrt{x}}\ .$$

Tässä nähdään differentiaalien käyttökelpoisuus.