Käänteisfunktio

Yhteen- ja vähennyslaskut ovat toistensa käänteislaskutoimituksia, samoin kerto- ja jakolasku (nollasta eroavalla luvulla).
Jos funktioille f ja g pätee

$$\begin{cases}(g \circ f)(x) = x \\ (f \circ g)(y) = y\end{cases},$$

niin funktiot f ja g toimivat kuten yhteen ja vähennyslaskutoimitukset, eli peräkkäin suoritettuina antavat (palauttavat) muuttujan alkuperäisen arvon, eli x:n tai y:n. Tällaisia funktioita kutsutaan toistensa käänteisfunktioiksi.

Määritelmä, käänteisfunktio:
Funktiot f ja g ovat toistensa *käänteisfunktioita*, jos

$$g\big(f(x)\big) = x \qquad \text{ja} \qquad f\big(g(y)\big) = y$$
$$(g \circ f)(x) = x \qquad\qquad (f \circ g)(y) = y$$

kaikilla niillä muuttujan arvoilla x, y, joilla ko. funktio on määritelty.

Huomautus Yleisesti käänteisfunktiolle käytetään merkintää f^{-1} ja luetaan ”f miinus 1”. ÄLÄ sekoita potenssimerkintään $(f)^{-1} = \frac{1}{f}$.

Esimerkkejä Olkoot **a)** $f(x) = x^3 + 1$ ja $g(y) = \sqrt[3]{y-1}$ sekä
b) $f(x) = x^2$ ja $g(y) = \sqrt{y}$.
Ovatko f ja g toistensa käänteisfunktioita?

a) Funktiot f ja g on määritelty $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Onko juurifunktiokin? Miksi?

$$\Rightarrow \begin{array}{l}(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{(x^3+1)-1} = \sqrt[3]{x^3} = x \\ (f \circ g)(y) = \left(\sqrt[3]{y-1}\right)^3 + 1 = y - 1 + 1 = y\end{array} \Rightarrow \text{ Ovat.}$$

b) Funktio f on määritelty $\forall x \in \mathbb{R}$ ja g kun $y \geq 0$.

$$\Rightarrow \begin{array}{ll}(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = |x| \neq x, & \text{kun } x < 0 \\ (f \circ g)(y) = (\sqrt{y})^2 = y, & \text{OK}\end{array}$$

Eivät siis ole kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$ $(x, y < 0)$, mutta ovat kun $x, y \geq 0$.

Funktion f ja käänteisfunktion f^{-1} kuvaajat ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen, **kun molemmilla on sama muuttuja**. Katso kirjan kuvat esimerkeissä s. 104 – 105.

Miten käänteisfunktio löytyy/muodostetaan?

Esimerkki Olkoon f: $f(x) = 2x + 3$. Ratkaistaan funktiota vastaavasta yhtälöstä $y = 2x + 3$ muuttuja x:

$$y = 2x + 3$$
$$2x = y - 3$$
$$x = \frac{y-3}{2}$$

Eli käänteisfunktioksi saadaan

$$g\colon\ g(y) = \frac{y-3}{2} = \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}\ .$$

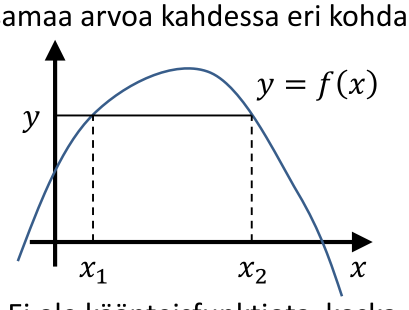
Kun merkitään muuttujaa y:n sijasta x:llä, niin $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$.

Koska $f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$, niin $g = f^{-1}$ on f:n käänteisfunktio.

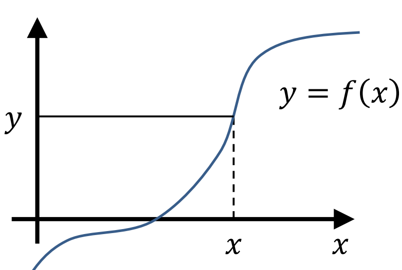
Milloin käänteisfunktio on olemassa? (Eli milloin voidaan pyytää anteeksi)

Edellinen esimerkki antoi keinon löytää käänteisfunktio ratkaisemalla x yhtälöstä $y = f(x)$. Muista, että $f(x)$ on x:stä riippuva lauseke. Nyt siis $g(y)$ ilmoittaa, missä kohdassa x funktio f saa arvon y.

Funktion määritelmän nojalla f:llä on käänteisfunktio, jos f ei saa samaa arvoa kahdessa eri kohdassa.



Ei ole käänteisfunktiota, koska $f(x_1) = f(x_2)$, mutta $x_1 \neq x_2$.



On käänteisfunktio.

Kun tilanne ei ole vas. puoleinen, niin yhtälöllä $y = f(x)$ on yksikäsitteinen ratkaisu x kaikilla niillä y:n arvoilla, jotka kuuluvat $\mathcal{A}_f$:ään.

Havaitaan, että käänteisfunktion olemassaoloon riittää f:n aito monotonisuus.

Lause Jokaisella aidosti monotonisella funktiolla on käänteisfunktio.
Todistus Sivuutetaan, on selvää → katso kuvat. (näin ei siis saa kokeessa tehdä todistuksia ☺)

Esimerkki
a) Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 + x$ on käänteisfunktio $g = f^{-1}$.
b) Muodosta g:n määrittely- ja arvojoukot, eli $\mathcal{M}_g$ ja $\mathcal{A}_g$.
c) Laske $g(2)$.
d) Mitä voidaan sanoa g:n lausekkeesta.

a) Koska $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \ \forall x$, niin f on aidosti monotoninen (aidosti kasvava) $\forall x \in \mathbb{R}$. Näin ollen f:llä on olemassa $g \coloneqq f^{-1}$.
b) Koska f on jva polynomifunktiona $\forall x \in \mathbb{R}$ ja

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(x^3 + x) = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}(x^3 + x) = -\infty$$

niin $\mathcal{A}_f = \mathbb{R}$. Toisaalta myös $\mathcal{M}_f = \mathbb{R}$. Näin ollen

funktion g joukoille saadaan

$$\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{f^{-1}} = \mathcal{A}_f = \mathbb{R}, \qquad \mathcal{A}_g = \mathcal{A}_{f^{-1}} = \mathcal{M}_f = \mathbb{R}\,.$$

c) Koska $y = f(x)$ ja $g(y) = x$, niin

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)\,.$$

Ja nyt, mitä on $g(2)$? Eli ratkaistaan millä x pätee $f(x) = 2$, josta saadaan haluttu arvo (käänteisfunktion ominaisuudesta).

$$f(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + x = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 1 \ \ \text{käy}$$

(Ja muita ratkaisuja ei ole, sillä f on aidosti monotoninen.)
d) Pitää ratkaista yhtälöstä $y = x^3 + x$ muuttuja x, joka on y:stä jollain tavalla riippuvaa. → Menee haastavaksi…yksittäisratkaisuja voidaan toki etsiä ja löytää kuten **c)**-kohdassa. Laskin kyllä antaa vastauksen:

$$x = \frac{\sqrt[3]{6}\cdot\left(\sqrt[3]{2}\cdot\left(\sqrt{81y^2+12}+9y\right)^{\frac{2}{3}} - 2\cdot\sqrt[3]{3}\right)}{6\cdot\sqrt[3]{\sqrt{81y^2+12}+9y}}$$

Jatkuvan funktion käänteisfunktion tutkiminen

- Tutki, onko funktio f aidosti monotoninen → derivoi → onko $f' > 0$ vai $f' < 0$.
- Muodosta f:n määrittelyjoukko $\mathcal{M}_f$ ja arvojoukko $\mathcal{A}_f$.
- Ratkaise yhtälöstä $y = f(x)$ muuttuja x, eli $x = g(y)$ mikäli mahdollista (tämän hetkisillä tiedoilla).
- Ilmoita käänteisfunktio $g = f^{-1}$ vaihtamalla muuttuja $y \to x$, eli muodossa $g(x)$.
- Tarkistus: Piirrä funktioiden f: $f(x)$, g: $g(x)$ kuvaajat, eli graafit $\mathcal{G}_f$ ja $\mathcal{G}_g$, joiden pitää olla symmetrisiä suoran $y = x$ suhteen.