Jatkuva todennäköisyysjakauma

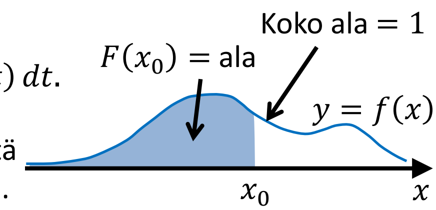
Perusasiat kuntoon.

Määritelmä:
Funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ *tiheysfunktio*, jos
1. $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$,
2. f on jatkuva kaikkialla paitsi äärellisen monessa kohdassa,
3. käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin väliin jäävän alueen pinta-ala on 1.

Eli kolme ehtoa pitää toteutua!

Määritelmä:
Jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ kertymäfunktio F saadaan integroimalla tiheysfunktio, siis

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$



Eli F mittaa paljonko todennäköisyyttä on ehtinyt kertyä kohtaan $x = x_0$ asti.

Huomautus Kertymäfunktio F on aina jatkuva ja kasvava! Lisäksi

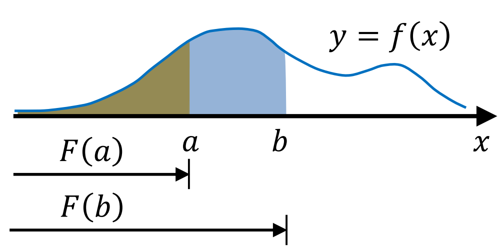
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} F(x) = 1.$$

Todennäköisyydet määritetään kertymäfunktion avulla, sillä määritelmän mukaan

$$P(\underline{x} < a) = F(a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)\,dt.$$

Ja esimerkiksi

$$\begin{cases} P(a \leq \underline{x} \leq b) = F(b) - F(a) \\ P(a \leq \underline{x}) = 1 - P(\underline{x} < a) = 1 - F(a) \end{cases}.$$



Määritelmä, *jatkuvan satunnaismuuttujan odotusarvo, keskihajonta ja varianssi*:
Jos jatkuvan satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio on f, niin

odotusarvo on

$$\mu = \mathbb{E}\underline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \,,$$

varianssi on

$$\sigma^2 = \mathbb{D}^2\underline{x} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx \,,$$

ja *keskihajonta* varianssin neliöjuurena

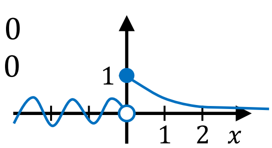
$$\sigma = \mathbb{D}\underline{x} = \sqrt{\mathbb{D}^2\underline{x}} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx} \;.$$

Erityisesti varianssille saadaan odotusarvoa hyödyntäen (todistus harjoitustehtävä)

$$\mathbb{D}^2(\underline{x}) = \mathbb{E}\left[\left(\underline{x}-\mu\right)^2\right] = \ldots = \mathbb{E}(\underline{x}^2) - \left(\mathbb{E}(\underline{x})\right)^2 .$$

Esimerkki 1 **a)** Millä a:n arvolla funktio

$$f\colon\; f(x) = \begin{cases} ae^{-x}, & \text{kun } x \geq 0 \\ 0, & \text{kun } x < 0 \end{cases}$$



on erään satunnaismuuttujan tiheysfunktio?
b) Laske f:n avulla todennäköisyys sille, että $-1 \leq \underline{x} \leq 2$.

a) Käydään kolme ehto läpi.
1) ehto: $ae^{-x} \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, OK kunhan $\boldsymbol{a \geq 0}$.
2) ehto: ei aseta vakiolle a mitään lisävaatimuksia, koska funktio f on jatkuva kaikilla $x \neq 0$.
3) ehto: Nyt $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$, eli

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{\infty} ae^{-x}\, dx = 0 + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} ae^{-x}\, dx$$

$$= \lim_{b\to\infty} \mathop{/}_{0}^{b} -ae^{-x} = 0 + a = 1 \quad \Longrightarrow \quad a = 1$$

b) Todennäköisyydelle saadaan:

$$P(-1 \leq x \leq 2) = F(2) - F(-1) = \int_{-1}^{2} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{2} 1 \cdot e^{-x}\,dx = \underset{0}{\overset{2}{/}} -e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^2} \approx 0{,}865$$

Esimerkki 2 Käydään taululla.

Esimerkki 3 Moniste (vanha koetehtävä).