DIFF.&INT.LASK. JAT-KOKURSSI, MAA13

Integraalilaskentaa

Paloittain määritellyn funktion integroiminen → 10.-kurssi. Palautetaan mieleen, että integraalifunktion F on oltava jatkuva (koska on määritelmän mukaan derivoituva). Näin ollen on integroimisvakioiden C ja D (tai C_1 ja C_2) välille saatava yhteys.
Lopuksi, alkuehto huomioiden $F(x_0) = y_0$, valitaan oikea F:n lauseke, jonka kautta määritetään integroimisvakio.

Siirrytään tarkastelemaan epäoleellisia integraaleja.

10.-kurssilla määrätty integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ sisälsi kaksi ehtoa:

1) väli $[a, b]$ on rajoitettu ja
2) funktio f on jatkuva välillä $[a, b]$, eli f ei voi saada arvoja $\pm\infty$.

Nyt luovutaan näistä ehdoista, jolloin tarkastellaan *epäoleellisia integraaleja*:

- integroimisväli on ääretön tai
- integroitava funktio eli integrandi on rajoittamaton.

Molemmat tapaukset hoituvat raja-arvoa hyödyntämällä.

Esimerkki (integroimisväli ääretön) Määritä

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx, \qquad \int_1^\infty \frac{1}{x^{1/4}}\,dx \ .$$

Saadaan

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx \overset{b>1}{=} \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x}\,dx = \lim_{b\to\infty} \Big/_1^b \ln x = \lim_{b\to\infty} [\ln b - \overbrace{\ln 1}^{=0}]$$

$$= \lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

Sanotaan, että integraali $\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$ *hajaantuu*. Edelleen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx \overset{k>1}{=} \lim_{k\to\infty} \int_1^k \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{k\to\infty} \Big/_1^k -\frac{1}{x} = \lim_{k\to\infty} \left[-\frac{1}{k} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1$$

Sanotaan, että integraali $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ *suppenee*. Edelleen

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/4}}\,dx \overset{a>1}{\widehat{=}} \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} \frac{1}{x^{1/4}}\,dx = \lim_{a\to\infty} \Big/_{1}^{a} \frac{4}{3}\cdot x^{3/4}$$

$$= \lim_{a\to\infty}\left[\frac{4}{3}\cdot a^{3/4} - \frac{4}{3}\cdot 1^{3/4}\right] = \lim_{a\to\infty}\left(\frac{4}{3}\cdot\sqrt[4]{a^3} - \frac{4}{3}\right) = \infty$$

Sanotaan, että integraali $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1/4}}\,dx$ *hajaantuu*. Mitä havaitaan → katsotaan x:n eksponentteja! Nehän olivat 1,2 ja 1/4 koska ($\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^{1/4}}$).

Yleisesti pätee

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^n}\,dx \quad \begin{array}{ll} \text{hajaantuu,} & \text{kun } 0 \le n \le 1 \\ \text{suppenee,} & \text{kun } 1 < n \end{array}.$$

Entäpä

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \quad ?$$

Kun integroimisvälinä on $]-\infty,\infty[$, niin etsitään sellainen kohta x_0, jossa funktio f on hyvin määritelty ja hyödynnetään määrätyn integraalin ominaisuutta

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx, \qquad \text{missä } a < c < b\,.$$

Siis

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\int_a^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_{x_0}^{b} f(x)\,dx$$

Jos funktiona on f: $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, niin kohdaksi x_0 voidaan valita mikä tahansa kohta (f hyvin määritelty $\forall x \in \mathbb{R}$). Saadaan ($x_0 = 0$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^0 \frac{x}{x^2+1}\,dx + \lim_{b\to\infty}\int_0^b \frac{x}{x^2+1}\,dx = \ldots$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left[0 - \tfrac{1}{2}\ln(a^2+1)\right] + \lim_{b\to\infty}\left[\tfrac{1}{2}\ln(b^2+1) - 0\right] = -\infty + \infty = \text{ei määr}$$

Mutta huomaa, että määrätty integraali

$$\int_{-10}^{10} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\tfrac{1}{2}\ln(10^2+1) - \tfrac{1}{2}\ln\big((-10)^2+1\big)\right] = 0$$

Eli kaikilla reaalisilla arvoilla c pätee $\int_{-c}^{c} \frac{x}{x^2+1}\,dx = 0$. Tähän palataan.

Lasketaan tähän väliin teht. 201, 202 ja 208.

Esimerkki (funktio rajoittamaton) Määritä

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}}\,dx \ .$$

Saadaan

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx \overset{a<1}{\widehat{=}} \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{a\to 0+} \mathop{/}_{a}^{1} \ln x = \lim_{a\to 0+} [\ln 1 - \overbrace{\ln a}^{\le 0}]$$

$$= \lim_{a\to 0+} -\ln a = \infty$$

Sanotaan, että integraali $\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ *hajaantuu*. Edelleen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx \overset{a<1}{\widehat{=}} \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{a\to 0+} \mathop{/}_{a}^{1} -\frac{1}{x} = \lim_{a\to 0+} \left[-\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{a}\right)\right]$$

$$= \lim_{a\to 0+} \left(\frac{1}{a} - 1\right) = \infty$$

Sanotaan, että integraali $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$ *hajaantuu*. Edelleen

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}}\,dx \overset{a<1}{\widehat{=}} \lim_{a\to 0+} \int_a^1 \frac{1}{x^{1/4}}\,dx = \lim_{a\to 0+} \mathop{/}_{a}^{1} \frac{4}{3}\cdot x^{3/4}$$

$$= \lim_{a\to 0+} \left[\frac{4}{3}\cdot 1^{3/4} - \frac{4}{3}\cdot a^{3/4}\right] = \lim_{a\to 0+} \left(\frac{4}{3} - \frac{4\cdot \sqrt[4]{a^3}}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

Sanotaan, että integraali $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/4}}\,dx$ *suppenee*. Mitä havaitaan → katsotaan x:n eksponentteja! Nehän olivat 1,2 ja 1/4 koska ($\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \frac{1}{x^{1/4}}$).

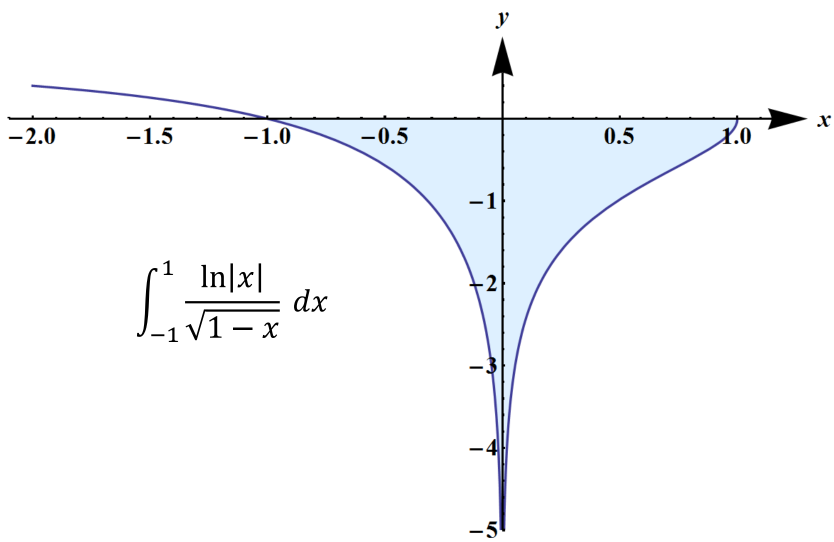
Yleisesti

$$\int_0^1 \frac{1}{x^n}\,dx \quad \begin{array}{ll} \text{hajaantuu,} & \text{kun } 1 \le n \\ \text{suppenee,} & \text{kun } 0 < n < 1 \end{array} .$$

Eli toisinpäin, kuin välillä $[1,\infty[$.

Paloittelu tarvittaessa niin moneen osaan kuin tarvetta.

Esimerkki Määritä $\int_{-1}^{1} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}} dx$, kuvaaja alla. Havaitaan, että ongelmakohdat ovat $x = 0$ ja $x = 1$.



Integrointi antaa, kun on välit $[-1,0[$, $\left]0,\frac{1}{2}\right]$ ja $\left[\frac{1}{2},1\right[$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\, dx + \int_{0}^{x_0=\frac{1}{2}} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\, dx + \int_{x_0=\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\, dx$$

$$= \lim_{a\to 0-} \int_{-1}^{a} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\, dx + \lim_{b\to 0+} \int_{b}^{x_0=\frac{1}{2}} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\, dx + \lim_{c\to 1-} \int_{x_0=\frac{1}{2}}^{c} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\, dx$$

$$\overbrace{=\ldots=}^{\text{laskin}} 2\ln\left(2\cdot\sqrt{2}+3\right) - 4\cdot\sqrt{2} \approx -2{,}131$$

Periaatteessa kaksi viimeistä integraalia voisi yhdistää, eli

$$\lim_{b\to 0+} \int_{b}^{x_0=\frac{1}{2}} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\, dx + \lim_{c\to 1-} \int_{x_0=\frac{1}{2}}^{c} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\, dx = \lim_{\substack{c\to 1- \\ b\to 0+}} \int_{b}^{c} \frac{\ln|x|}{\sqrt{1-x}}\, dx\ .$$

Muutama mielenkiintoinen epäoleellinen integraali

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

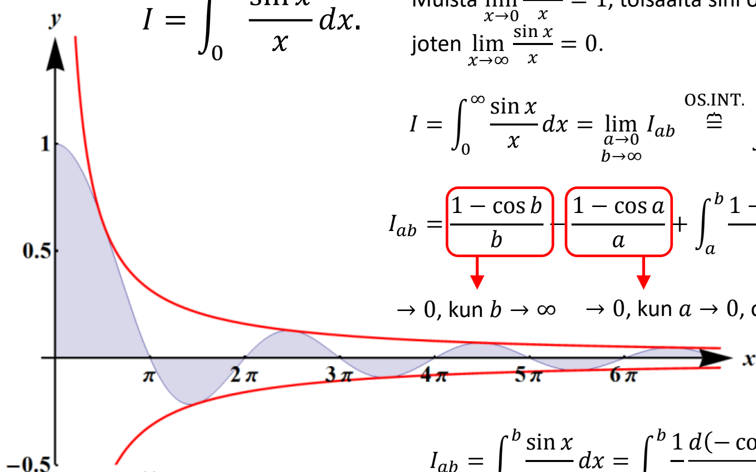
Muista $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, toisaalta sini on rajoitettu, joten $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\substack{a\to 0\\ b\to\infty}} I_{ab} \overset{\text{OS.INT.}}{=} \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$$

$$I_{ab} = \boxed{\frac{1-\cos b}{b}} - \boxed{\frac{1-\cos a}{a}} + \int_a^b \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx.$$

$\to 0$, kun $b \to \infty$ $\quad\to 0$, kun $a \to 0$, onko selvä?

→ L'Hospital



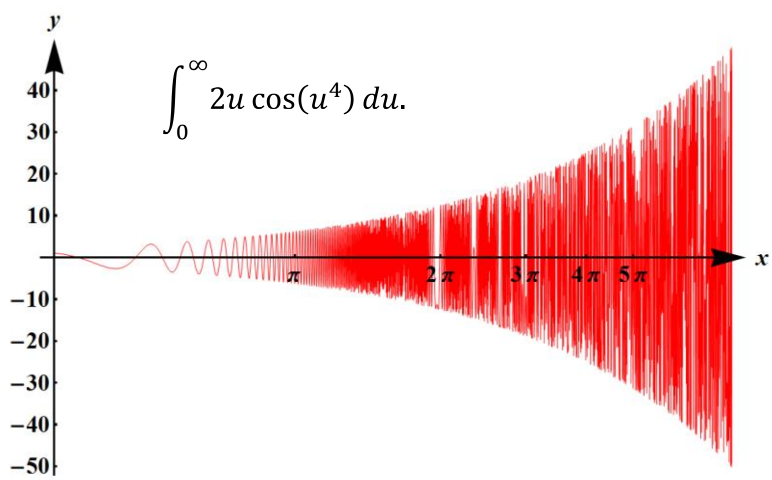
$$I_{ab} = \int_a^b \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_a^b \frac{1}{x}\frac{d(-\cos x + C)}{dx}\,dx.$$

Koska sinin integraali on miinus kosini plus C (valitaan C:ksi ykkönen).

$$I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Muutama mielenkiintoinen epäoleellinen integraali

$$\int_0^\infty 2u\cos(u^4)\,du.$$



Mitä tässä tapahtuu?