Integraalilaskentaa

Käsitellään ensin integroimismenetelmiä
- *osittaisintegrointi* (kertauksena),
- *osamurtokehitelmä*, kerrataan perusidea ja laajennetaan hiukan,
- uutena menetelmänä *sijoitusmenettely* eli *muuttujan vaihto*.

Sitten tarkastellaan epäoleellisia integraaleja
- kun integroimisväli on ääretön, esimerkiksi

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^4 \cos(x)\,dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty x\,dx,$$

- kun integroimisvälillä integrandi saa mielivaltaisen suuria tai pieniä arvoja, esimerkiksi

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_{-1}^2 1/x^3\,dx,$$

- sekä näiden erilaisia yhdistelmiä.

Lopuksi tarkastellaan sovelluksia, eli jatkuvia jakaumia. Palataan todennäköisyyslaskentaan.

Osittaisintegrointi

Teoria käyty 10.-kurssilla, lyhyt kertaus. Menetelmä perustuu siis tulofunktion derivoimissääntöön.

Jos annettu funktio, mikä pitää integroida, on muotoa $D\big(f(x)\big)\cdot g(x)$, niin *osittaisintegrointisäännön* nojalla pätee (integroimisvakio C voidaan sisällyttää integraaleihin ja lisätä vasta lopuksi.)

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,dx\,.$$

ja

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \mathop{/}_{a}^{b} f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Esimerkkejä tarvittaessa?

Osamurtokehitelmä

Osamurtokehitelmää sovelletaan rationaalifunktioihin.
Kun osoittajan asteluku $>$ nimittäjän asteluku $\rightarrow$ asteluvun pudotus ja integrointi, esim. integroi $\int \frac{x^2+5}{x+1}dx$. Asteluvun pudotus joko jakokulmalla / muilla menetelmillä (alla). Nyt rationaalilausekkeelle saadaan.

$$\frac{x^2+5}{x+1} = \frac{x^2-1+6}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{6}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} + \frac{6}{x+1}$$

$$= x - 1 + \frac{6}{x+1}, \qquad x \neq -1$$

ja näin ollen

$$\int \frac{x^2+5}{x+1}dx = \int \left(x - 1 + \frac{6}{x+1}\right)dx = \int x\,dx - \int dx + 6\int \frac{1}{x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - x + 6\ln|x+1| + C\,.$$

Kun osoittajan asteluku $=$ nimittäjän asteluku, niin kirjoitetaan integrandi toisella tapaa, esim.

$$\frac{x^3-x-2}{x^3} = 1 - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}\,,$$

tai

$$\frac{x-2}{x+4} = \frac{x\overbrace{+4-4}^{=0}-2}{x+4} = \frac{x+4}{x+4} - \frac{6}{x+4}\,.$$

Kun osoittajan asteluku $<$ nimittäjän asteluku, niin käytetään osamurtokehitelmää. Nimittäjä jakaantuu tekijöihin, jotka ovat yleisesti muotoa

$$(x-b)^n, \qquad (x^2+px+q)^m\,.$$

Syntyy erilaisia tapauksia (katso kirjan sivu 72):
- Nimittäjän tekijät ovat kaikki 1. astetta ja erilaisia, $\frac{10x-6}{(x+1)(x-3)}$.
- Nimittäjän tekijät ovat 1.astetta ja sama tekijä toistuu, $\frac{x^2-3}{x(x+1)^2}$.
- Nimittäjässä on tarkalleen yksi 2. asteen tekijä ($\mathbb{C}$-juuret) , $\frac{7x^2-4x+10}{x(x^2+2)}$.

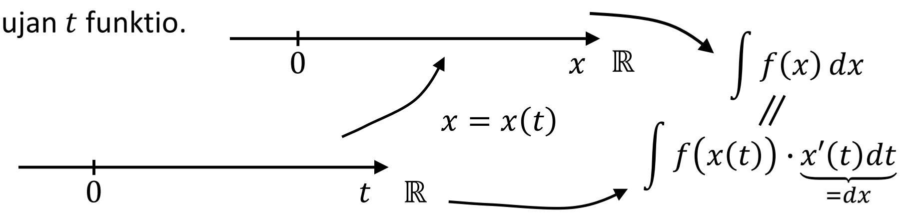
Käydään näistä esimerkit taululla!

Sijoitusmenettely eli muuttujanvaihto

Joskus integrointi helpottuu ns. *muuttujan vaihdon* eli *sijoitusmenettelyn* myötä. Palautetaan mieleen yhdistetyn funktion derivointikaava:

$$D(f \circ g)(x) = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

Jos ei osata suoraan integroida $\int f(x)\,dx$, niin tätä (derivointikaavaa) hyödyntäen tehdään sijoitus $x = x(t)$, eli nyt muuttuja x onkin muuttujan t funktio.



Menetelmän oikeellisuuteen riittää, että sijoitusfunktio $x = x(t)$ kuin myös funktio $f = f(x)$ ovat jatkuvasti derivoituvia (+ määrittelyjoukot OK). Huomaa vielä, että $dx = dx/dt \cdot dt = x'(t)dt$.

Esimerkki Määritä $\int \sin(2x)\,dx$.

Tehdään sijoitus $x = \frac{1}{2}t$, jolloin $dx = \frac{dx}{dt} \cdot dt = x'(t)dt = \frac{1}{2}dt$. Joten

$$\int \sin(2x)\,dx \overset{\text{M.V.}}{\triangleq} \int \sin\left(2 \cdot \frac{1}{2}t\right)\frac{1}{2}dt = \frac{1}{2}\int \sin(t)\,dt = -\frac{1}{2}\cos t = -\frac{\cos 2x}{2}.$$

Määrätty integraali vastaavasti; Nyt pitää lisäksi huomioida **uudet rajat**. Määritä $\int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx$.

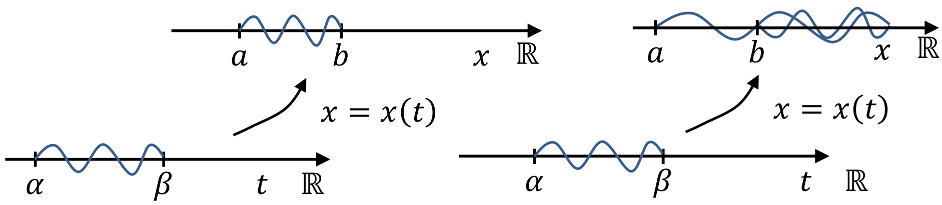
Muuttujan vaihto tehty yllä, määritetään uudet rajat. Kun $x = 0$, niin $0 = \frac{1}{2}t$, eli $t = 0$. Ja kun $x = \pi$, niin $\pi = \frac{1}{2}t$, eli $t = 2\pi$. Näin ollen

$$\int_0^{\pi} \sin(2x)\,dx \overset{\text{M.V.}}{\triangleq} \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(t)\,dt = \frac{1}{2} \Big/_{0}^{2\pi} \cos t$$

$$\boxed{\int_{a=x(\alpha)}^{b=x(\beta)} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(x(t)\big)\,x'(t)dt} \qquad = \frac{1}{2}[\cos(2\pi) - \cos(0)] = 0$$

Huomautus Muuttujanvaihto sijoitusfunktiota $x = x(t)$ käyttäen ei vaadi, että funktio $x = x(t)$ kuvaisi integrointivälin $[\alpha, \beta]$ t-puolelta integrointiväliksi $[a, b]$ x-puolelle. Riittää, että $x(\alpha) = a$ ja $x(\beta) = b$.

Katsotaas tarkemmin… siis joko näin … tai esim. näin

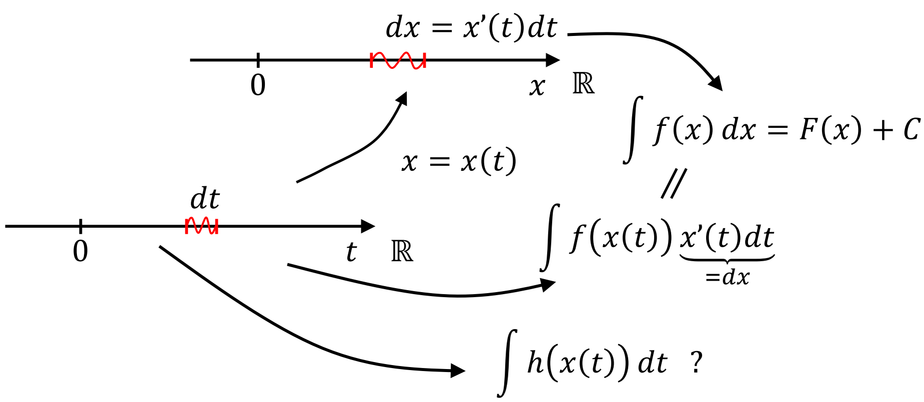


Menetelmän toimivuuteen siis riittää, että sijoitusfunktio $x = x(t)$ on jatkuvasti derivoituva. Monissa (soveltavissa) tehtävissä pitää kuitenkin määrittää integraali

$$\int h\big(x(t)\big)\,dt,$$

josta integrandista puuttuu termi $x'(t)$ eli sisäfunktion derivaatta.

Katotaas tilannetta kuvioiden avulla:



Muuttujanvaihtoa eli sijoitusfunktion käyttöä voidaan nyt hyödyntää mikäli integrandi $h\big(x(t)\big)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$h\big(x(t)\big) = f\big(x(t)\big) \cdot x'(t),$$

missä f on nyt vain jokin funktio, joka on määritelty x-puolella.

Näin voidaan **aina** tehdä, kun oletetaan, että $x = x(t)$ on jatkuvasti derivoituva ja $x'(t) \neq 0$, eli derivaatta ei häviä. Se on joko pos. tai neg.

Nimittäin tällöin löytyy eli on olemassa käänteisfunktio $t = t(x)$, jon-ka derivaatta $t'(x)$ on myös jatkuva ja jolle

$$t'(x) = \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{1}{x'(t)}, \qquad \text{muista } x'(t) \neq 0.$$

Ja kun merkitään

$$f(x) = h(x) \cdot t'(x)\,,$$

niin

$$h(x) = \frac{f(x)}{t'(x)} \qquad \Longrightarrow \qquad h\big(x(t)\big) = \frac{f\big(x(t)\big)}{t'(x)} = f\big(x(t)\big) \cdot \frac{1}{t'(x)}\,.$$

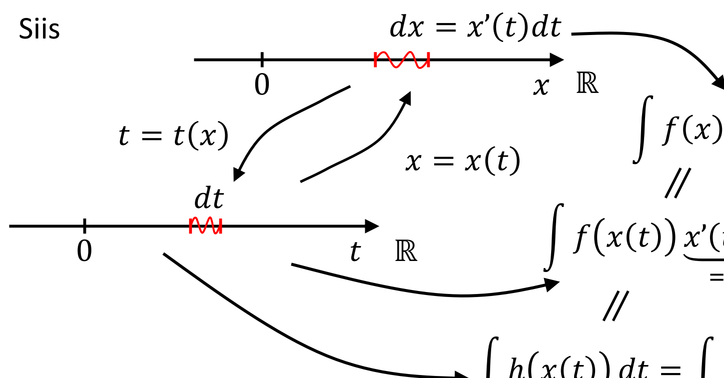
Siis

$$h\big(x(t)\big) = f\big(x(t)\big) \cdot x'(t), \qquad \text{OK}\,.$$

Näin ollen muuttujanvaihto on saavutettu, sillä

$$\int h\big(x(t)\big)\,dt = \int f\big(x(t)\big) \cdot x'(t)\,dt = \int f(x)\,dx = \int h(x) \cdot t'(x)dx$$

Siis



$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$//$$

$$\int f\big(x(t)\big)\,\underbrace{x'(t)dt}_{=dx}$$

$$//$$

$$\int h\big(x(t)\big)\,dt = \int h(x) \cdot t'(x)dx$$

Esimerkki Määritä $\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}}$. Tässä siis $h\big(x(t)\big) = \frac{1}{\sqrt{t}}$.
Sijoitusfunktio $x = x(t) = \sqrt{t}$, jolloin $t = t(x) = x^2$ ja $t'(x) = 2x$.
Rajat: $t = 1 \rightarrow x = 1$ ja $t = 4 \rightarrow x = 2$. Näin ollen saadaan

$$\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{t}}dt \overset{\text{M.V.}}{\triangleq} \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot 2xdx = \int_1^2 2\,dx = \mathop{/}_{1}^{2} 2x = 4 - 2 = 2\,.$$

Mikä on funktio $f = f(x)$ ja mikä on $x'(t)$? Vastaus: $f = f(x) = 2$ ja $x'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$.