SARJAT

DIFF.- JA INTEG.LASK.
JATKOKURSSI, MAA13

Määritelmä, sarja:

Sarja on *ääretön summa* eli päättymätön summa. Summattavia on siis ääretön määrä.

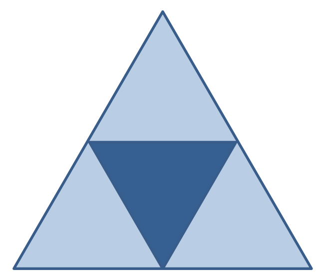
Mikäli osasummille S_n on olemassa äärellinen raja-arvo; $\lim_{n\to\infty} S_n = b \in \mathbb{R}$, eli

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots a_n) = b \in \mathbb{R}$$

Niin sanotaan, että sarja suppenee (konvergoi). Muussa tapauksessa sarja hajaantuu (divergoi) kohti $+\infty$:ntä tai $-\infty$:ntä.

Esimerkki Osoita, että

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}\ .$$



Vinkki, tutki kuviota. Kyseessä on geom. **sarja**.
Geom. sarja suppenee, jos pätee
$|q| < 1$. Tämä OK, sillä $q = 1/4$.

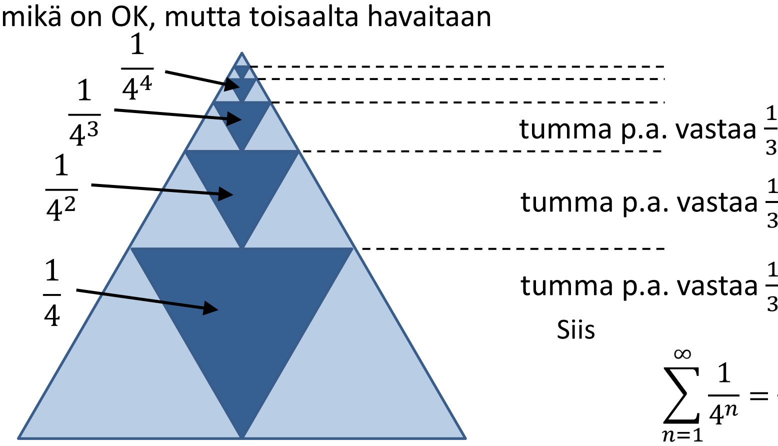
Tarkasteltavana on geometrinen jono

$$(a_n):\ a_n = \frac{1}{4^n}, \qquad q = \frac{1}{4}\ .$$

Nyt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} =: \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{4^n} = \lim_{k\to\infty} S_k = \lim_{k\to\infty} \frac{a_1(1-q^k)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q},$$

mikä on OK, mutta toisaalta havaitaan



Siis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}\ .$$