LUKUJONON MONOTONISUUS

DIFF.- JA INTEG.LASK. JATKOKURSSI, MAA13

Määritelmä: Lukujono (a_n) on

- **kasvava, jos $\boldsymbol{a_n \leq a_{n+1}}$** (jonon termi/jäsen on vähintään yhtä suuri kuin edellinen)
- **aidosti kasvava , jos $\boldsymbol{a_n < a_{n+1}}$** (jonon termi/jäsen on suurempaa kuin edellinen)
- **vähenevä, jos $\boldsymbol{a_n \geq a_{n+1}}$** (jonon termi/jäsen on korkeintaan yhtä suuri kuin edellinen)
- **aidosti vähenevä, jos $\boldsymbol{a_n > a_{n+1}}$** (jonon termi/jäsen on pienempää kuin edellinen)

kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n.

Lukujonoa (a_n) sanotaan (aidosti) *monotoniseksi*, jos se on joko (aidosti) kasvava tai vähenevä. Vertaa diff.laskennan muutosnopeus – sanaan.

Monotonisuus osoitetaan tutkimalla peräkkäisten termien erotusta (jonon yleisillä termeillä). Jos erotus $a_{n+1} - a_n > 0$ eli $a_{n+1} > a_n$ $\forall n$, niin jono on aidosti kasvava (vast. kasvava, jos $a_{n+1} \geq a_n$) ja jos erotus $a_{n+1} - a_n < 0$ eli $a_{n+1} < a_n$ $\forall n$, niin jono on aidosti vähenevä (vast. vähenevä, jos $a_{n+1} \leq a_n$). Mikäli $a_{n+1} = a_n$ jollain n, niin jonon aitous häviää!

Monotonisuutta tutkitaan usein käyttämällä derivaattaa → katso kirjan esimerkit.

Esimerkki. Tutki lukujonon (a_n): $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ monotonisuutta.

Aluksi havaitaan, että

$$a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \quad a_{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

Näin ollen

$$a_{n+1} - a_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Tässä on vain lavennettu samannimisiksi

$$= \frac{n+1-1}{n+1} - \left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n}$$

$$= \frac{n^2 - (n^2 - 1)}{n(n+1)} = \frac{1}{n^2 + n}$$

Muistia:
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Eli $a_{n+1} - a_n > 0$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+$, josta seuraa $a_{n+1} > a_n$. Siis, lukujono (a_n): $a_n = 1 - \frac{1}{n}$ on aidosti kasvava.

Entäpä derivaatan avulla tehty monotonisuuden tarkastelu?