LUKUJONON RAJA-ARVO

DIFF.- JA INTEG.LASK.
JATKOKURSSI, MAA13

Määritelmä, lukujonon suppeneminen kohti raja-arvoa:
Lukujono, eli funktio, (a_n) *suppenee* kohti raja-arvoa a, jos sen termit a_n saadaan mielivaltaisen lähelle lukua a, aina kun indeksi n valitaan riittävän suureksi. Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad a \in \mathbb{R} \qquad \text{tai} \qquad a_n \to a, \qquad \text{kun } n \to \infty\,.$$

Jos lukujono ei suppene, se *hajaantuu* (kohti $+\infty$ tai $-\infty$).

Huomautus Lukujonoilla on mielekästä tutkia raja-arvoa vain kun $n \to \infty$, eikä esimerkiksi kun $n \to n_0$ (eli jotain tiettyä indeksiä).

Esimerkki Lukujono

a) $(1, 2, 3, 4, \ldots)$ hajaantuu ja $\lim_{n\to\infty} a_n =$ "∞",

b) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$ suppenee ja $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

c) $(1, -1, 1, -1, \ldots)$ hajaantuu ja $\lim_{n\to\infty} a_n =$ ei määritelty.

Huomautus Voidaan osoittaa, että mikäli lukujonon raja-arvo on olemassa (siis jokin reaaliluku), niin se on *yksikäsitteinen*. Eli lukujonolla voi olla vain yksi raja-arvo.

Miten lukujonon raja-arvo käytännössä määritetään (lasketaan)?
Voidaan hyödyntää differentiaalilaskennan työkaluja, eli tarkastellaan lukujonoa vastaavaa funktiota ja sen ominaisuuksia kuten aitoa monotonisuutta jne. **Tai** muokataan yleistä termiä, jotta rajankäynti onnistuu, ("huijataan").

Esimerkki **a)** Kun $a_n = 2 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}$, niin $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$, sillä $\frac{1}{n} \to 0$ ja $\frac{1}{n^2} \to 0$, kun $n \to \infty$.

b) Kun $b_n = \frac{5n^2-3n+2}{2n^2-1}$, niin...

Jaetaan rajankäyntiä varten jokainen termi suurimmalla n:n asteella, eli tässä n^2:lla.

$$\frac{5n^2 - 3n + 2}{2n^2 - 1} = \frac{\overset{5}{\frac{5n^2}{n^2}} - \overset{0}{\frac{3n}{n^2}} + \overset{0}{\frac{2}{n^2}}}{\underset{2}{\frac{2n^2}{n^2}} - \underset{0}{\frac{1}{n^2}}} \to \frac{5}{2}, \qquad \text{kun } n \to \infty\,.$$

Esimerkki (jatkuu)

Rajankäyntiä varten juurista on päästävä eroon. Hyödynnetään neliöiden erotusta, eli $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$.

c) Kun $c_n = \frac{2n-\sqrt{n^2+2}}{2n+\sqrt{n^2+2}}$, niin...

$$\frac{2n-\sqrt{n^2+2}}{2n+\sqrt{n^2+2}} = \frac{\left(2n-\sqrt{n^2+2}\right)\left(2n+\sqrt{n^2+2}\right)}{\left(2n+\sqrt{n^2+2}\right)^2}$$

$$= \frac{4n^2-(n^2+2)}{4n^2+4n\sqrt{n^2\left(1+\frac{2}{n^2}\right)}+(n^2+2)}$$

Nyt ei tarvitse ottaa n:n itseisarvoa, koska indeksi n on aina positiivista!

$$= \frac{3n^2-2}{5n^2+4n^2\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+2}$$

Neliöjuuren sisään jää vain 1, ja muuten samoin kuin ed. kohdassa.

$$= \frac{\frac{3n^2}{n^2}-\frac{2}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2}+\frac{4n^2\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}}{n^2}+\frac{2}{n^2}} \to \frac{3}{5+4} = \frac{1}{3}, \qquad \text{kun } n \to \infty$$

Huomautus Rajankäynnissä älä sekoita kahta eri merkitsemistapaa, siis **joko**

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \text{"jotain"} = \lim_{n\to\infty} \text{"jotain sievennettyä"} = \begin{cases}\text{vakio} \\ \pm\infty\end{cases},$$

missä limes-merkintä pitää olla jokaisen yhtäsuuruus-merkin jälkeen!

tai

$$a_n = \text{jotain} = \text{jotain sievennettyä} \to \begin{cases}\text{vakio} \\ \pm\infty\end{cases}, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$

Ei näin

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \text{jotain} = \lim_{n\to\infty} \text{"jotain sievennettyä"} = \begin{cases}\text{vakio} \\ \pm\infty\end{cases}, \qquad \text{kun } n \to \infty.$$

Esim.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2-3n+2}{2n^2-1} = \dots = \frac{5}{2}, \qquad \text{kun } n \to \infty$$

Eikä mitään muuta sekoitusta.

Lause, raja-arvoja lukujonoille:

Muista $n > 0$!

Vakiojonon raja-arvo on kyseinen vakio, siis

$$\lim_{n\to\infty} c = c\,.$$

Indeksijonon raja-arvo on ääretön, siis

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty\,.$$

Potenssijonon raja-arvo on ääretön, siis

$$\lim_{n\to\infty} n^k = \infty, \qquad k > 0\,.$$

Kasvu on hidasta kun
$0 < k < 1$,
mutta kasvua kuitenkin.

Harmonisen jonon raja-arvo on nolla, siis

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0\,.$$

Ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^k} = 0, \qquad k > 0.$$

Ilmiö näkyy heikos-ti, jos $k > 0$ on hy-vin lähellä nollaa.

Todistus Sivuutetaan.

Lause, raja-arvoja laskusääntöjä lukujonoille (kuten funktioille):

Jos $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, niin

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = ca,$$

Vakiotekijäin siirto.

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b,$$

Summan raja-arvo on raja-arvojen summa.

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = ab\,.$$

Tulon raja-arvo on raja-arvojen tulo.

Jos lisäksi $b \neq 0$ ja $b_n \neq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$, niin

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Osamäärän raja-arvo on raja-arvojen osam.

Todistus Sivuutetaan.

Voidaan osoittaa $(\varepsilon, n_\varepsilon)$-tekniikalla, että mikäli lukujonon (äärellinen) raja-arvo on olemassa, se on *yksikäsitteinen*. Siis lukujonolla voi olla vain yksi (äärellinen) raja-arvo! Tämä siis kertauksena.