Raja-arvokäsitteen laajennuksia, vol2

DIFFERENTIAALI- JA INTEGRALILAKSENNAN JATKOKURSSI, MAA13

2. Raja-arvo äärettömyydessä, vinot suoraviivaiset ja käyräviivaiset asymptootit $\boldsymbol{y = ax + b}$, $\boldsymbol{a \neq 0}$ ja $\boldsymbol{y = f(x)}$, $\boldsymbol{f}$:n aste $\boldsymbol{\geq 2}$.

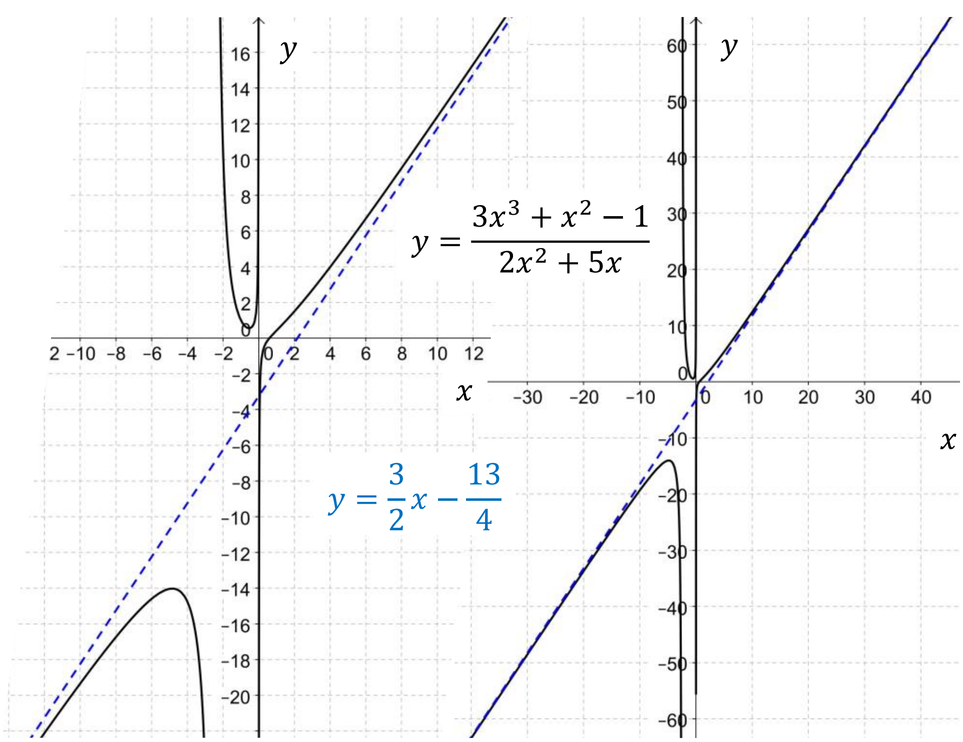
Kun osoittajan aste on suurempi kuin nimittäjän, niin rationaalifunktion raja-arvo $\pm\infty$:ssä on $+\infty$ tai $-\infty$. Eivät välttämättä ole samoja.

Esimerkki 4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3+x^2-1}{2x^2+5x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(2+\frac{5}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} x\cdot\frac{3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}{2+\frac{5}{x}} = "\infty"\cdot\frac{3}{2} = "\infty".$$

Ja toisaalta

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^3+x^2-1}{2x^2+5x} = \ldots = "-\infty"\cdot\frac{3}{2} = "-\infty".$$



2. Raja-arvo ääretön, pystysuorat asymptootit $x = x_0$

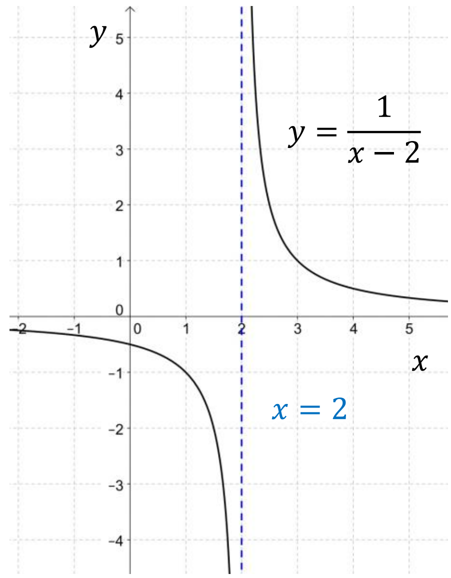
Esimerkki 5
Tarkastellaan funktiota

$$f : f(x) = \frac{1}{x-2}\ .$$

Piirretään kuvaaja eli käyrä $y = \frac{1}{x-2}$.

Nyt, kun $x \to 2-$, niin funktion f arvot näyttävät vähenevän rajatta. Vastaavasti, kun $x \to 2+$, niin f:n arvot näyttävät kasvavan rajatta.

Sanotaan, että funktiolla f on kohdassa $x = 2$ (epäoleellinen) vasemmanpuoleinen raja-arvo $-\infty$ ja vast. (epäoleellinen) oikeanpuoleinen raja-arvo $+\infty$. Käyrä $y = \frac{1}{x-2}$ lähenee suoraa $x = 2$ sitä saavuttamatta.



Sanotaan, että käyrällä on pystysuorana asymptoottina suora $x = 2$.

Yhteenvetoa – asymptoottien määrittäminen

Rationaalifunktion kuvaajalla on

- *pystysuora asymptootti* $x = x_0$ nimittäjän niissä nollakohdissa, joissa osoittaja $\neq 0$,
- *vaakasuora asymptootti* $y = 0$ eli x-akseli, jos osoittajan aste on pienempi kuin nimittäjän,
- *vaakasuora asymptootti* $y = y_0\ (\neq 0)$ eli x-akselin suuntainen suora, jos osoittajan ja nimittäjän asteet ovat samat,
- *vino suoraviivainen asymptootti* $y = ax + b\ (a \neq 0)$, jos osoittajan aste on yhtä suurempi kuin nimittäjän,
- *vino käyräviivainen asymptootti* $y = f(x)$, jos osoittajan aste on vähintään kahta suurempi kuin nimittäjän.

MUISTA
Asymptootit helpottavat käyrien piirtämistä **käsin**. Yleisesti: lasketaan pienillä muuttujan x arvoilla funktion arvoja $f(x)$ → sijoitetaan pisteet koordinaatistoon → määritetään ja piirretään asymptootit → ja lopuksi piirretään kuvaaja. Nämä kaikki TI-nspire hoitaa sekunnissa ☺.

Esimerkki Määritä käyrän $y = \frac{x^2}{1-x}$ asymptootit ja piirrä kuvaaja.

Nimittäjän nollakohta on $x = 1$ ja se **ei** ole osoittajan nollakohta, joten suora $x = 1$ on pystysuora asymptootti,

$$\lim_{x \to 1-} \frac{x^2}{1-x} = \infty, \qquad \lim_{x \to 1+} \frac{x^2}{1-x} = -\infty \,.$$

Edelleen koska

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{1-x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x \cdot x}{x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right)} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x}{\frac{1}{x} - 1} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2}{1-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x \cdot x}{x \cdot \left(\frac{1}{x} - 1\right)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\frac{1}{x} - 1} = \infty \end{cases},$$

niin ei ole vaakasuoria asymptootteja!

Tarkastellaan raja-arvoja $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{1-x}$ vielä tarkemmin.

Koska osoittaja voidaan kirjoittaa muotoon

$$x^2 = x^2 \overbrace{-1 + 1}^{=0} = (x-1)(x+1) + 1,$$

missä on hyödynnetty neliöiden erotusta $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$, niin

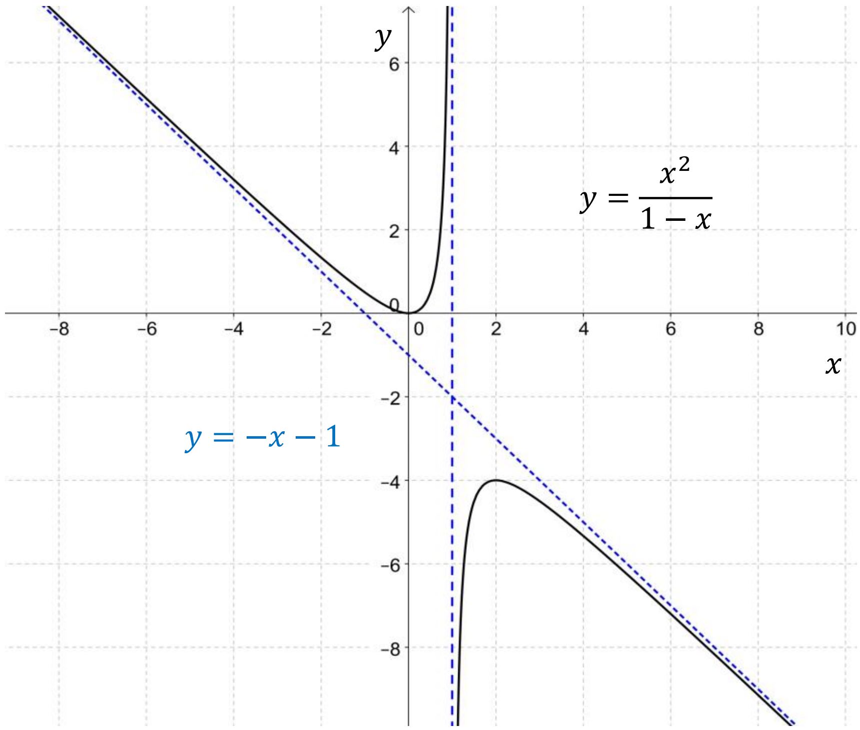
$$\frac{x^2}{1-x} = \frac{(x-1)(x+1)+1}{1-x} = \frac{-(1-x)(x+1)+1}{1-x}$$

$$= -(x+1) + \frac{1}{1-x} = -x - 1 + \frac{1}{1-x} \,.$$

Näin ollen, kun $x \to \pm\infty$, niin

$$\frac{1}{1-x} \to 0 \qquad \text{ja} \qquad \frac{x^2}{1-x} \to -x - 1,$$

eli käyrä $y = \frac{x^2}{1-x}$ lähestyy suoraa (asymptoottia) $y = -x - 1$.



Lopuksi: Jos nimittäjän nollakohta on myös osoittajan nollakohta, niin on tutkittava raja-arvoa kyseisessä kohdassa. Jos raja-arvo on äärellinen, niin kuvaajassa on ”yhden pisteen kokoinen” aukko. Jos taas raja-arvo on ääretön, niin silloin kyseisessä kohdassa on pystysuora asymptootti.