Raja-arvokäsitteen laajennuksia

DIFFERENTIAALI- JA INTEGRALILAKSENNAN JATKOKURSSI, MAA13

Tarkastellaan raja-arvoa ”haastavissa” tilanteissa.

1. Raja-arvo äärettömyydessä, vaakasuorat asymptootit $y = y_0$.

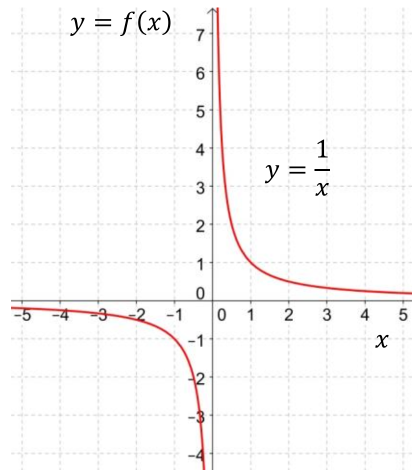
Esimerkki 1 Tarkastellaan funktiota

$$f: f(x) = \frac{1}{x},$$

kun x *vähenee rajatta* ts. $x \to -\infty$ (kirjan esimerkki 1).

”Selvästi” f:n arvot lähestyvät nollaa ja siksi sanotaan, että f:llä on *miinus äärettömyydessä (epäolennainen) raja-arvo* 0, merkitään

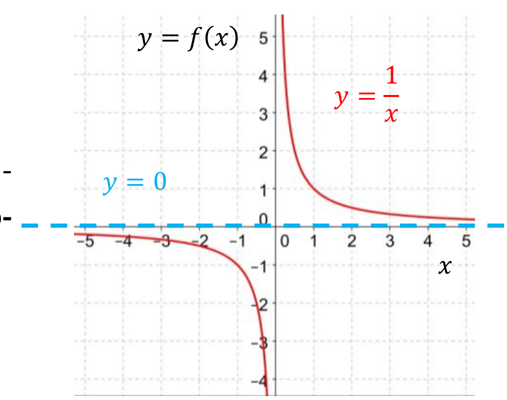
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$



Vastaavasti, kun $x \to \infty$, eli kun x *kasvaa rajatta*, niin f:n arvo lähenee nollaa ja f:llä on *äärettömyydessä (epäolennainen) raja-arvo* 0, merkitään

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0\,.$$

Näin ollen käyrällä $y = \frac{1}{x}$ on vaakasuora **asymptootti eli rajasuora** $y = 0$.



Esimerkki 2

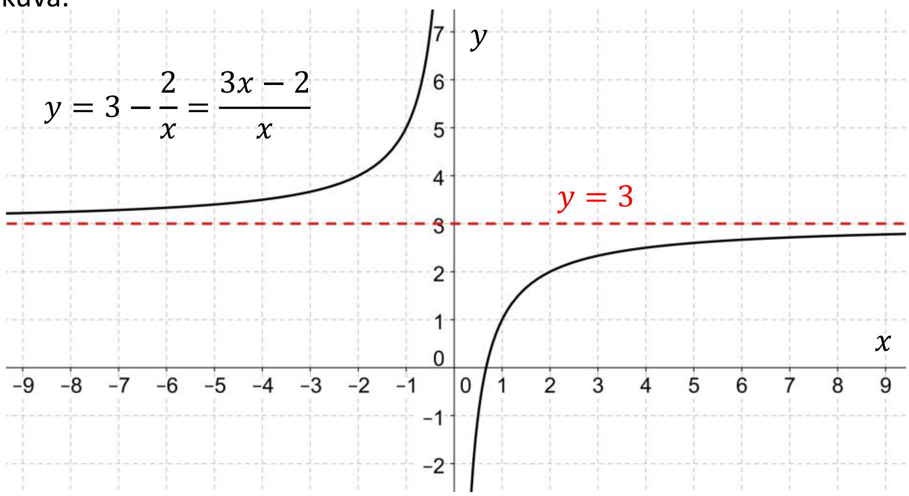
Laske **a)** **b)** **c)**

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(3 - \frac{2}{x}\right), \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{3 - \frac{2}{x}}, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - 6x}{3x + 2}$$

Merkintä $x \to \pm\infty$ tarkoittaa raja-arvoja $x \to +\infty$ ja $x \to -\infty$.

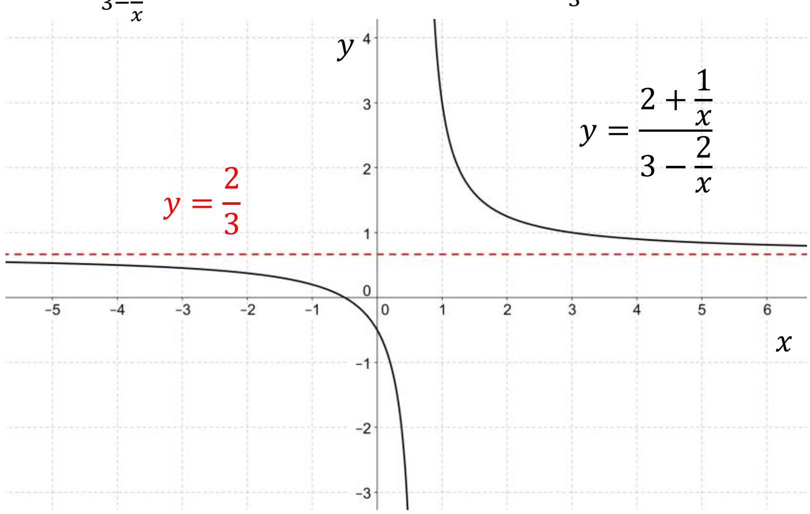
a) $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)=3-2\cdot\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=3-2\cdot 0=3$$

Ts., ”suurilla ja pienillä” x käyrä $y=3-\frac{2}{x}$ lähenee suoraa $y=3$. Sanotaan, että käyrällä $y=3-\frac{2}{x}$ on vaakasuora asymptootti $y=3$, katso kuva.



b) $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x}}=\frac{\lim_{x\to\pm\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to\pm\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)}=\frac{2+\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}}{3-\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x}}=\frac{2+0}{3-0}=\frac{2}{3}$$

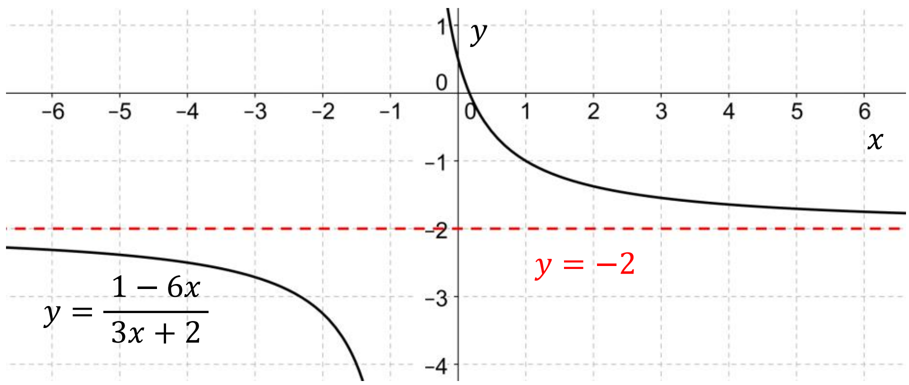
Käyrällä $y=\frac{2+\frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x}}$ on vaakasuora asymptootti $y=\frac{2}{3}$, katso kuva.



c) Kun $x \to \infty$, niin osoittaja $(1-6x) \to -\infty$ ja nimittäjä $(3x+2) \to \infty$. Saadaan epämääräinen $\frac{-\infty}{\infty}$ muoto, josta **ei** voi päätellä raja-arvoa. Samoin, kun $x \to -\infty$, niin saadaan $\frac{-\infty}{\infty}$. Tässä auttaa pieni temppu:

$$\frac{1-6x}{3x+2} = \frac{x\left(\frac{1}{x}-6\right)}{x\left(3+\frac{2}{x}\right)} = \frac{\frac{1}{x}-6}{3+\frac{2}{x}} \longrightarrow \frac{0-6}{3+0} = -2, \qquad \text{kun } x \longrightarrow \pm\infty$$

Vaakasuora asymptootti on siis suora $y = -2$.



Yleisesti, jos osoittajan ja nimittäjän asteet ovat samat, niin rationaalifunktion raja-arvo $\pm\infty$:ssä on korkeimman asteen termien kerrointen osamäärä, esim

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2+3x-1}{x^2+2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x^2}}$$

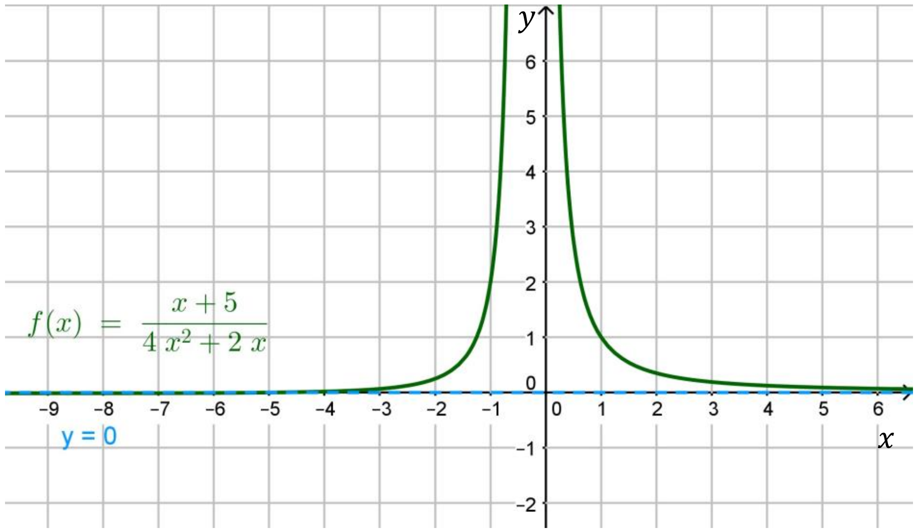
$$= \frac{2-0-0}{1+0} = 2$$

Entäpä, jos nimittäjän aste on isompi kuin osoittajan?

Esimerkki 3

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+5}{4x^2+2x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}{x^2\left(4+\frac{2}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1+\frac{5}{x}}{4+\frac{2}{x}} = 0 \cdot \frac{1}{4} = 0\,.$$

Yleisesti, aina kun osoittajan aste on pienempi kuin nimittäjän, niin rationaalifunktion raja-arvo $\pm\infty$:ssä on nolla. Asymptoottina x-akseli.



$f(x) = \frac{x+5}{4x^2+2x}$
y = 0
y
x
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−9
−8
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6