Korkeamman kertaluvun derivaatat

DIFF.&INT.LASK. JAT-KOKURSSI, MAA13

Derivaatan derivaatta on toisen kertaluvun derivaatta ja sitä merkitään

$$f''(x), \qquad D^2 f, \qquad \frac{d^2 f}{dx^2} \ .$$

Yleisesti n:nnen kertaluvun derivaatta:

$$f^{(n)}(x), \qquad D^n f, \qquad \frac{d^n f}{dx^n} \ .$$

Esimerkki Määritä $f^{(5)}$, kun $f\colon\ f(x) = \cos x + 2x^7$.

$$f'(x) = -\sin x + 14x^6$$

$$f''(x) = -\cos x + 84x^5$$

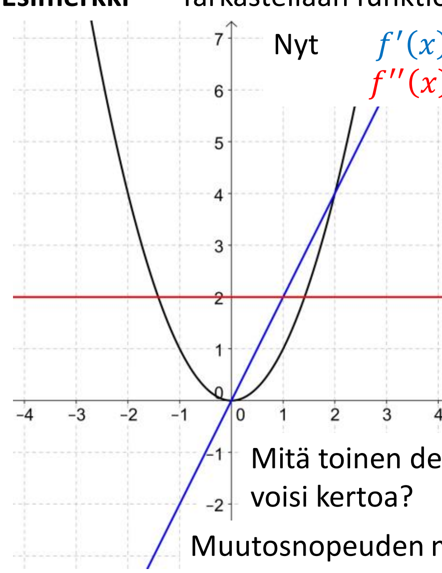
$$f'''(x) = \ \sin x + 420x^4$$

$$f^{(4)}(x) = \ \cos x + 1680x^3$$

$$f^{(5)}(x) = -\sin x + 5040x^2$$

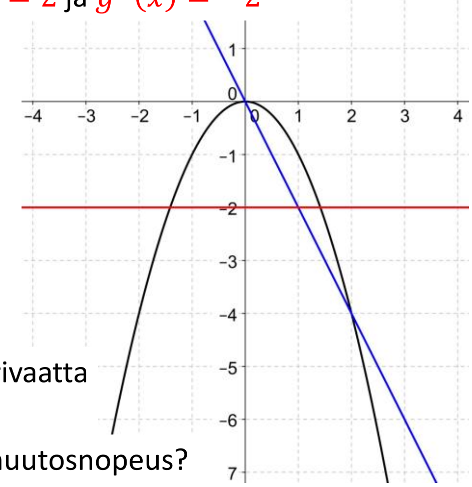
Derivaatta on hetkellinen muutosnopeus → geometrisena tulkintana tangentin kulmakertoimen arvo. Mitä korkeamman asteen derivaatat kertovat?

Esimerkki Tarkastellaan funktioita $f\colon\ f(x) = x^2$ ja $g\colon g(x) = -x^2$.



Nyt $f'(x) = 2x$ ja $g'(x) = -2x$

$f''(x) = 2$ ja $g''(x) = -2$



Mitä toinen derivaatta voisi kertoa?

Muutosnopeuden muutosnopeus?

Toinen derivaatta kertoo kaarevuuden/kuperuuden.

Määritelmä – Lause:
Jos funktion f toinen derivaatta f'' on positiivista jollakin välillä, niin funktio f on kaareva "ylöspäin", mutta kupera alaspäin tällä välillä ja vastaavasti jos f'' on negatiivista, niin funktio f on kaareva "alaspäin", mutta kupera ylöspäin. Katso myös kuvat s.57.
Käännekohdassa kuperuuden suunta muuttuu ja vastaava käyrän piste on *käännepiste*.

Huomautus Kirja määrittelee saman asian s.56 käyrän ja tangentin välisen aseman suhteen, eli onko käyrä tangenttinsa ylä- vai alapuolella.

Terassipiste → katso kirjan esimerkki 2 sivu 58

Mitä kolmannet ja korkeammat derivaatat ilmaisevat? Hyvä kysymys!

Lause:
Jos funktion $f'(x_0) = 0$ ja (katso myös kuvat sivulta 59)

- $f''(x_0) > 0$, niin kohta x_0 on f:n min-kohta (lokaali tai globaali).
- $f''(x_0) < 0$, niin kohta x_0 on f:n max-kohta (lokaali tai globaali).

Esimerkki T – 134 a)
a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x \implies f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$ joka voidaan kirjoittaa muotoon $f'(x) = 6(x^2 - 3x + 2)$.

$$f'(x) = 0 \iff x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \iff \begin{matrix} x = 2 \\ x = 1 \end{matrix}$$

Siis $f'(2) = 0$ ja $f'(1) = 0$. Edelleen

$$f''(x) = 12x - 18 \quad \implies \begin{cases} f''(2) = 24 - 18 = 6 > 0 \\ f''(1) = 12 - 18 = -6 < 0 \end{cases}$$

Kohta $x = 1$ on f:n lokaali maksimikohta ja kohta $x = 2$ on f:n lokaali minimikohta. Lisäksi

$$f(1) = 2 - 9 + 12 = 5, \qquad f(2) = 16 - 36 + 24 = 4\,.$$