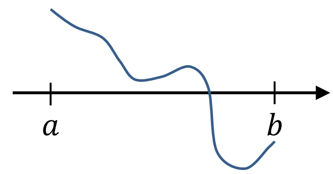
Jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia, vol2

Palautetaan mieleen 7.-kurssilta tärkeät lauseet!

Lause, Bolzano:
Jos funktio f on jatkuva *suljetulla* välillä $[a, b]$ ja saa välin päätepisteissä erimerkkiset arvot, niin funktiolla f on **ainakin** yksi nollakohta välillä $]a, b[$, katso kuva.



Esimerkki Osoita, että polynomilla

$$P(x) = x^2 - 4$$

on vähintään 2 reaalista nollakohtaa.

Ratkaisu Nyt

$$P(0) = 0^2 - 4 = -4$$

ja sekä suurilla että pienillä muuttujan x arvoilla $P(x) = x^2 - 4 > 0$. Näin ollen riittää löytää jotkin arvot.

Kun $x = 10$ ja $x = -10$, niin

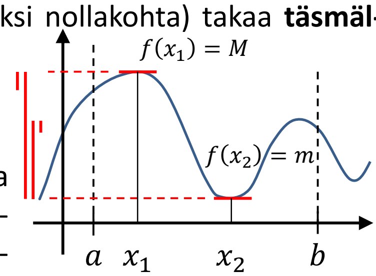
$$\begin{cases} P(10) = 100 - 4 = 96 > 0 \\ P(-10) = 100 - 4 = 96 > 0 \end{cases}$$

ja tällöin Bolzanon lauseen nojalla (kaikki polynomit ovat jatkuvia kaikilla suljetuilla väleillä) avoimilla väleillä $]-10, 0[$ ja $]0, 10[$ on ainakin yksi nollakohta → siis polynomilla P on vähintään kaksi nollakohtaa.

Huomautus Bolzano yhdessä aidon monotonisuuden kanssa (jollakin suljetulla välillä $[a, b]$ **korkeintaan** yksi nollakohta) takaa **täsmälleen** yhden nollakohdan!

Otetaan sitten toinen tärkeä lause.

Lause, jatkuvan funktion ääriarvolause:
Suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio saa aina (ts. saavuttaa) suurimman, merkitään $f_{\max}$ tai M, ja pienimmän, merkitään $f_{\min}$ tai m, arvonsa.



Lisäksi funktio saa (välillä $[a, b]$) kaikki arvot suurimman ja pienimmän arvon väliltä.

Huomautus Bolzano ja ääriarvolause vaativat suljetun välin.

Esimerkki Funktio $f\colon]0,1] \to \mathbb{R}\colon x \longmapsto \frac{1}{x}$ ei saa suurinta arvoaan.

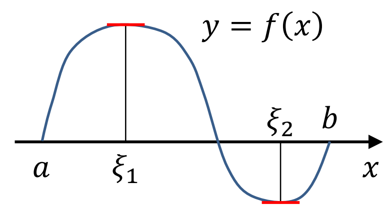
Esimerkki Funktio $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}\colon x \longmapsto \frac{1}{x}$ saa päätepisteissä erimerkkiset arvot mutta f:llä ei ole nollakohtaa välillä $[-1,1]$.

Siirrytään sitten yhteen tärkeimmistä derivaatan sovelluskohteesta.

Väliarvolause

Lause, Rolle:
Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituva vastaavalla avoimella välillä $]a,b[$. Jos $f(a) = f(b) = 0$, niin avoimella välillä $]a,b[$ on *ainakin* (saa olla useampi) yksi sellainen ξ, että $f'(\xi) = 0$.

Todistus ”Kuva” → tai katso kirja.



Huomautus Oletus $f(a) = f(b) = 0$ voidaan lieventää muotoon

$$f(a) = f(b)\,.$$

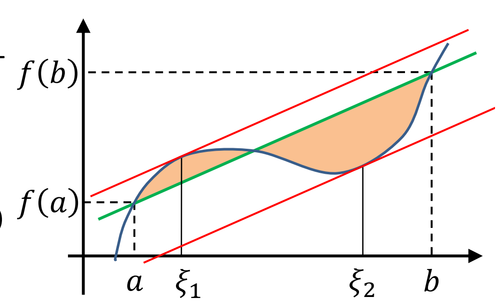
Rollen lausetta tarvitaan differentiaalilaskennan väliarvolauseen todistuksessa. Väliarvolausetta käyttäen funktiota voidaan tutkia derivaatan avulla.

Lause, väliarvolause:
Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a,b]$ ja derivoituva vastaavalla avoimella välillä $]a,b[$. Tällöin avoimella välillä $]a,b[$ on ainakin yksi sellainen ξ, että

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \Leftrightarrow \quad f'(\xi)(b-a) = f(b) - f(a)\ .$$

Todistus Hieman toisentyyppinen kuin kirjassa:
Sekantin eli suoran yhtälö on:

$$y - f(a) = \underbrace{\frac{f(b) - f(a)}{b - a}}_{\text{kulmakerroin}}(x - a)$$



josta

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\,.$$

Käyrän $y = f(x)$ ja sekantin y-koordinaattien erotus on funktio g:

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right)$$

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Funktio g toteuttaa Rollen lauseen ehdot, katso seuraavan dian kuvat:

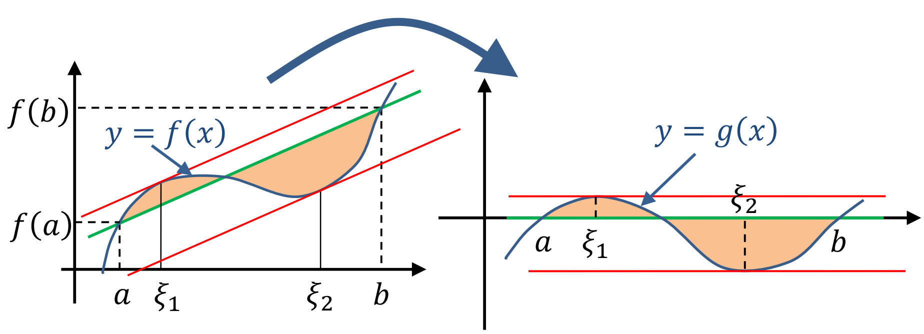
$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a}) &= f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) \\ &= 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}0 = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{b}) &= f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) \\ &= f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = \mathbf{0} \end{aligned}\right. , \quad \Longrightarrow \quad \begin{gathered} \exists\, \xi \in \,]a,b[\; s.e. \\ g'(\xi) = 0 \end{gathered}$$

Toisaalta derivaatta

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot 1,$$

joten

$$f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,.$$



Huomautus Väliarvolause → ξ on olemassa, mutta sen tarkka määrittäminen vain erikoistapauksissa!

Esimerkki Funktio f: $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x$ toteuttaa väliarvolauseen ehdot, sillä polynomifunktiona se on jatkuva ja derivoituva kaikkialla. Tarkastellaan väliä $[0,4]$ ja määritetään ξ.

$$\text{V.A.L} \quad \Rightarrow \quad f'(\xi) = \frac{f(4) - f(0)}{4 - 0} = \frac{\left(\frac{1}{12} \cdot 64 - 4\right) - (0)}{4 - 0} = \frac{4/3}{4} = \frac{1}{3}$$

Toisaalta

$$f'(\xi) = 3 \cdot \frac{1}{12}\xi^2 - 1 = \frac{1}{4}\xi^2 - 1,$$

joten

$$\frac{1}{4}\xi^2 - 1 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \xi^2 = \frac{4}{3} \cdot 4 = \frac{16}{3} \quad \Rightarrow \quad \xi = \pm\sqrt{\frac{16}{3}} \approx 2{,}309.$$

Josta negatiivinen arvo hylätään, välinä oli siis $[0,4]$.

Esimerkki Osoita V.A.L.:n avulla, että

$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}\ .$$

Esimerkki Osoita V.A.L.:n avulla, että

$$\frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}\ .$$

Todistus Tarkastellaan funktiota f: $f(x) = \sqrt{x}$, jolloin derivointi antaa f: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Edelleen V.A.L.:a käyttäen saadaan

$$\sqrt{66} - 8 = \sqrt{66} - \sqrt{64} = f'(\xi)(66 - 64), \qquad \xi \in \,]64, 66[\ .$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \begin{cases} > \frac{1}{\sqrt{66}} > \frac{1}{\sqrt{81}} = \frac{1}{9} \\ < \frac{1}{\sqrt{64}} = \frac{1}{8} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{9} < \sqrt{66} - 8 < \frac{1}{8}\ .$$

Väliarvolauseen käyttöä

Lause, sivu 41:
Olkoon funktio f jatkuva kohdassa x_0 ja derivoituva x_0:n aidossa ympäristössä. Jos derivaatan raja-arvo $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ on olemassa, niin f on derivoituva myös kohdassa x_0 ja

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x) \ .$$

Todistus Nyt V.A.L.:n ehdot ovat voimassa jossakin kohdan x_0 ympäristössä. Kun $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$ on olemassa, merkitään sitä C:llä, $C \in \mathbb{R}$, niin

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} \overset{\text{V.A.L.}}{=} \frac{f'(\xi)\big((x_0+h)-x_0\big)}{(x_0+h)-x_0} = f'(\xi),$$

missä $\xi \in \,]x_0, x_0+h[$. Kun nyt $h \to 0$, niin $\xi \to x_0$ ja

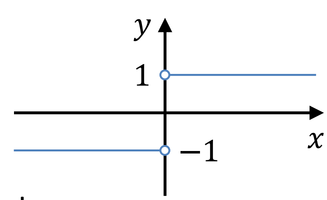
$$f'(x_0) \overset{\text{määr.}}{=} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} \overset{\text{V.A.L.}}{=} \lim_{\xi \to x_0} f'(\xi) = C.$$

Siis
$\boxed{f'(x_0) = C}$

Vakiofunktion derivaatta on nollafunktio. Onko käänteinen väite totta, eli jos f:n derivaatta on nolla, niin onko f vakiofunktio?

Tarkastellaan funktiota

$$f : f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} -1, & \text{kun } x < 0 \\ \ \ 1, & \text{kun } x > 0 \end{cases} .$$



Huomaa, että funktiota ei ole määritelty 0:ssa!
Nyt f:llä ei ole raja-arvoa origossa, mutta f on jatkuva määrittelyjoukossaan, eli $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Selvästi (onko? ... on, f on vakio) f on derivoituva ja f' on nollafunktio, mutta f ei ole vakiofunktio!

Käänteinen tulos (dian yläosassa esitettyyn tilanteeseen) on kyllä voimassa, jos f:n määrittelyjoukko on *väli*.

Lause, integraalilaskennan peruslause:
Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$. Jos $f'(x) = 0 \ \ \forall x \in \,]a, b[$, niin f on vakiofunktio välillä $[a, b]$.

Lause, integraalilaskennan peruslause:
Olkoon funktio f jatkuva suljetulla välillä $[a, b]$ ja derivoituva avoimella välillä $]a, b[$. Jos $f'(x) = 0 \ \forall x \in]a, b[$, niin f on vakiofunktio välillä $[a, b]$.

Todistus Olkoon $a \leq x \leq b$. Väliarvolauseen oletukset ovat voimassa, joten välillä $[a, b]$ pätee

$$f(x) - f(a) = f'(\xi)(x - a), \qquad \text{missä } a < \xi < x\,.$$

Koska

$$f'(\xi) = 0,$$

niin

$$f(x) - f(a) = 0 \cdot (x - a) = 0,$$

eli $f(x) = f(a)$. Siis funktio f on vakiofunktio välillä $[a, b]$.

Miten tää liittyy integraalilaskentaan? Hyvä kysymys…yhtään integraalia ei ole näkyvissä.

Palautetaan mieleen…

Olkoon funktio f määritelty tietyllä välillä I. Jos F on f:n eräs integraalifunktio ja $C \in \mathbb{R}$, niin f:n kaikki integraalifunktiot ovat muotoa $F + C$.

Todistus Olkoot F ja G funktion f integraalifunktioita tietyllä välillä I ja $C \in \mathbb{R}$ vakio. Pitää osoittaa, että $G = F + C$.

Koska F ja G ovat f:n integraalifunktioita, niin määritelmän nojalla $F' = f = G'$. Eli F ja G ovat jatkuvia koska ovat derivoituvia.

Muodostetaan erotusfunktio $h \coloneqq G - F$, joka on jatkuva kahden jatkuvan funktion erotusfunktiona. Nyt

$$D\big(h(x)\big) = D\big(G(x) - F(x)\big) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,$$

joten h on vakifunktio, eli $G = F + C$.