Derivoituvuus ja jatkuvuus

Kertausta:
Derivoituva funktio on aina jatkuva, mutta jatkuva funktio ei ole välttämättä derivoituva

Todistus Derivoituvuus $\Longrightarrow$ jatkuvuus kohdassa $x = x_0$, tehty aiemmin, katso moniste tai kirja.
Jatkuvuus $\not\Rightarrow$ derivoituvuus kohdassa $x = x_0$, perusesimerkkinä itseisarvofunktio f: $f(x) = |x|$ origossa.

Toisin sanoen jatkuvuus on *välttämätön muttei riittävä ehto* derivoituvuudelle.
(Kuten kummisetäni totesi eräällä hiihtoreissulla: ”Opeopinnot ovat välttämätön muttei riittävä ehto hyväksi opettajaksi tulemiselle.”)

Määritelmä, toispuoleiset derivaatat:
Funktion f vasemmanpuoleinen derivaatta kohdassa x_0 on

$$f'_{-}(x) = \lim_{h \to 0-} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x},$$

Ja funktion f oikeanpuoleinen derivaatta kohdassa x_0 on

$$f'_{+}(x) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}.$$

Esimerkkejä **T—87 a)** **T—84** **T—98**, tehdään taululla

Jatkuvien ja derivoituvien funktioiden yleisiä ominaisuuksia

Lokaalit = paikalliset ja globaalit = yleiset ominaisuudet.

Määritelmä (hieman ”ontto”):
Sanotaan, että funktio f on kasvava kohdassa x, jos x:llä on sellainen ympäristö, jossa f on kasvava. Vastaavasti vähenevä. Yleisesti *monotoninen* (siis joko kasvava tai vähenevä).

Huomaa, että kyseessä on f:n lokaali eli paikallinen ominaisuus.

Esimerkkejä Kuulukoot x_1 ja x_2 x:n ympäristöön. Tällöin, kun

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \leq f(x_2),$$

niin f on kasvava. Jos taas

$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) \geq f(x_2),$$

niin f on vähenevä.

Edelleen, kun

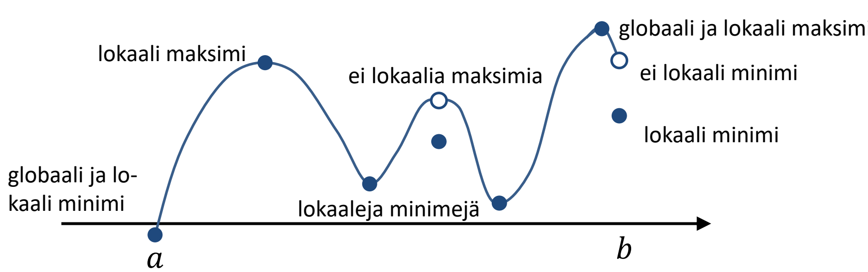
$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2),$$

niin f on aidosti kasvava, järjestys säilyy (ei yhtäsuuruutta mukana).
Vastaavasti, kun

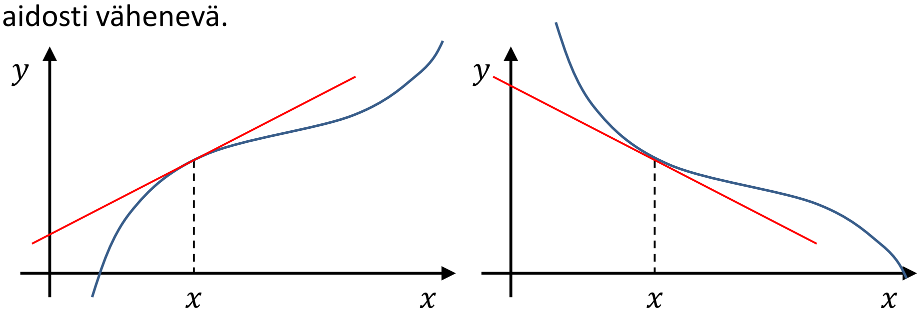
$$x_1 < x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$

niin f on aidosti vähenevä, järjestys kääntyy.

Palautetaan mieleen, että x on f:n *minimikohta*, jos $f(x)$ on f:n pienin arvo eräässä x:n ympäristössä ja *maksimikohta*, jos $f(x)$ on f:n suurin arvo tällaisessa ympäristössä. Yleisesti nämä ovat f:n *ääriarvokohtia*. Ääriarvokohtia sanotaan lokaaleiksi tai globaaleiksi.



Lause, funktion lokaali monotonisuus:
Olkoon funktio f derivoituva kohdassa x. Jos $f'(x) > 0$, niin f on tässä kohdassa aidosti kasvava. Jos $f'(x) < 0$, niin f on tässä kohdassa aidosti vähenevä.



Todistus Koska

$$\lim_{x_1 \to x_2} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = f'(x_2) > 0,$$

niin x_2:lla on ympäristö, jossa $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$. Tällöin osoittajan ja nimittäjän pitää olla samanmerkkiset, jotta osamäärä olisi > 0.

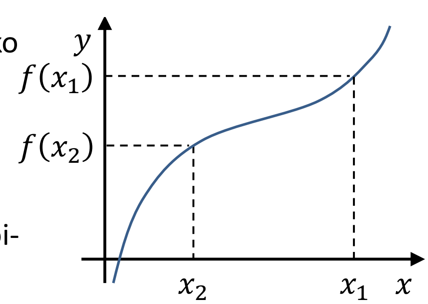
Mutta tämähän tarkoittaa sitä, että joko

$$x_1 > x_2 \quad \Longrightarrow \quad f(x_1) > f(x_2),$$

tai

$$x_2 > x_1 \quad \Longrightarrow \quad f(x_2) > f(x_1),$$

tämä on aidon kasvavuuden ehto. Toinen osa vastaavasti.



Huomautus Käänteinen tulos ei pidä paikkaa, eli aidosta lokaalista kasvusta ei välttämättä seuraa derivaatan positiivisuus (vähenemisestä negatiivisuus).

Esimerkkejä **a)** Funktiolle $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ on $f'(0) = 0$, mutta f on aidosti kasvava kaikilla x.

b) Funktiolle $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ on $f'(0) = 0$. Nyt $x = 0$ on f:n lokaali ja globaali minimi.

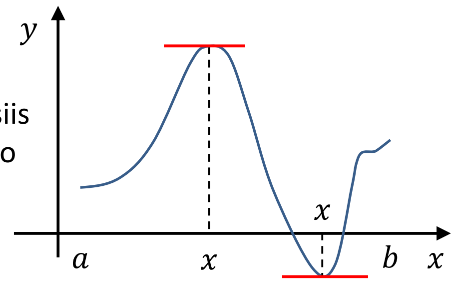
c) Funktiolle $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \end{cases}$ on $f'(0) = 0$,

mutta f ei ole monotoninen origossa eikä origo ole myöskään f:n ääriarvo kohta

Edellisestä lauseesta seuraa välttämätön ehto ääriarvokohdalle.

Lause, derivaatan nollakohtalause:
Olkoon funktio f derivoituva kohdassa x, joka ei ole f:n määrittelyvälin (joukon) pääte(reuna)kohta. Jos x on ääriarvokohta, niin $f'(x) = 0$.

"Todistus" Kuva.



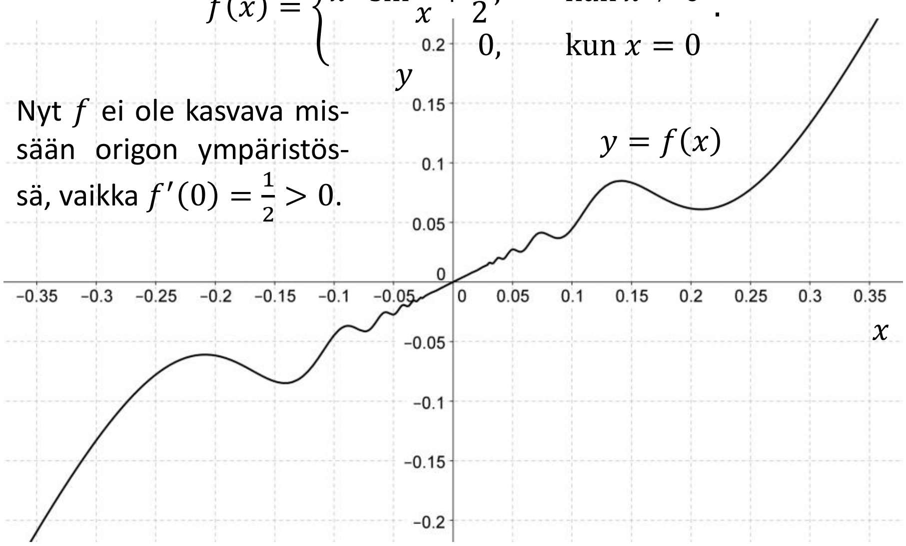
Huomautus Ehto $f'(x) = 0$ on siis välttämätön, mutta ei riittävä, katso edellisen esimerkin c)-kohta.

Palataan vielä edellisen lauseen tilanteeseen ja annetaan esimerkki funktiosta, jolle $f'(x_0) > 0$, mutta f ei ole missään x_0:n ympäristössä (aidosti) kasvava. Suomeksi sanottuna, lauseen tulos on voimassa yhdessä kohdassa, ei laajemmin.

Huomautus Ehdosta $f'(x_0) > 0$ ei voi päätellä yleisesti, että f olisi kasvava (aidosti kasvava) missään x_0:n ympäristössä.
Tarkastellaan funktiota f

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \end{cases}.$$

Nyt f ei ole kasvava missään origon ympäristössä, vaikka $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$.



Osoitetaan, että derivaatta on $1/2$.

$$
\begin{aligned}
f'(0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin\frac{1}{h}+\frac{h}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\left(h\cdot\sin\frac{1}{h}+\frac{1}{2}\right) \\
&= \lim_{h\to 0} h\cdot \underbrace{\sin\frac{1}{h}}_{\substack{-1\le\ \le 1 \\ \text{aina}}} + \lim_{h\to 0}\frac{1}{2} = 0+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Mitä tai miten lause pitäisi sitten muotoilla, jotta saataisiin tosi tulos?

Lause Olkoon f derivoituva kohdassa x_0.

1) Jos $f'(x_0) > 0$, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) < f(x_0) < f(t), \qquad \text{kaikilla } x_0-\delta < x < x_0 < t < x_0+\delta\,.$$

2) Jos $f'(x_0) < 0$, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

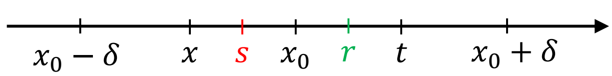
$$f(x) > f(x_0) > f(t), \qquad \text{kaikilla } x_0-\delta < x < x_0 < t < x_0+\delta\,.$$

Piirretään kuva.

Lause Olkoon f derivoituva kohdassa x_0.

1) Jos $f'(x_0) > 0$, niin on olemassa $\delta > 0$ siten, että

$$f(x) < f(x_0) < f(t), \qquad \text{kaikilla } x_0-\delta < x < x_0 < t < x_0+\delta\,.$$



Siis on olemassa $\delta > 0$ siten, että **kaikilla** x ja t, joille pätee

$$x_0-\delta < x < x_0 < t < x_0+\delta$$

seuraa $f(x) < f(x_0) < f(t)$, **mutta tämä ei tarkoita sitä** että **kaikilla** muuttujan s arvoilla jotka ovat x:n ja x_0:n välissä pätisi $f'(s) > 0$. Aivan hyvin voi olla $f'(s) < 0$. Kuitenkin $f(s) < f(x_0)$. Älä sekoita funktion arvoja ja derivaatan arvoja!

Vastaavasti voi olla sellainen r, jolle $x_0 < r < t < x_0+\delta$, mutta $f'(r) < 0$. Kuitenkin $f(x_0) < f(r)$.