DIFF.&INT.LASK. JATKOKURSSI, MAA13

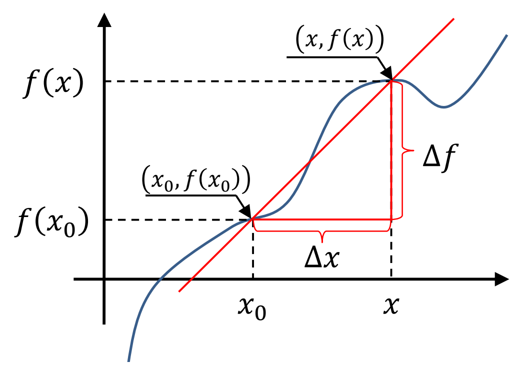
Funktion derivoituvuus

Määritelmä:
Olkoon f kohdan on x_0 ympäristössä määritelty funktio. Funktion f erotusosamäärä kohdasta x_0 kohtaan x $(\neq x_0)$ on

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Erotusosamäärä ilmoittaa funktion f arvon *keskimääräisen **muutos**nopeuden* kohdasta x_0 kohtaan x.

Geometrinen tulkinta: käyrän $y = f(x)$ pisteiden $\big(x, f(x)\big)$ ja $\big(x_0, f(x_0)\big)$ kautta kulkevan sekantin kulmakerroin.



Määritelmä:
Funktion f derivaatta kohdassa x_0 on erotusosamäärän raja-arvo

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Tällöin f on derivoituva kohdassa x_0.
Geometrinen tulkinta on käyrän $y = f(x)$ pisteeseen $\big(x_0, f(x_0)\big)$ asetetun tangentin kulmakertoimen lukuarvo (posit. tai negat.)

Huomautus Paljon eri merkintöjä, (yllä olevien lisäksi):

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{(x + h) - x},$$

Pitää olla sama muutos, tässä ”versiossa”.

$$\lim_{a \to b} \frac{f(a) - f(b)}{a - b}, \qquad \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Nämä kaikki tarkoittavat samaa asiaa, eli mitä?

Siis ***erotus – osamäärän - raja-arvo*** kolme kohtaa (käydään ne läpi).

1) Ensin tehdään vähennyslaskut:

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) = \text{jokin luku } (\Delta f = \text{pystyakseliarvojen erotus}) \\ \quad x - x_0 \quad = \text{jokin luku } (\Delta x = \text{vaaka} - \text{akseliarvojen erotus}) \end{cases}$$

2) Sitten näistä luvuista tehdään jakolaskut

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\text{jokin luku}}{\text{jokin luku}} = \text{jokin luku}$$

3) Kohtia **1)** ja **2)** suoritetaan yhä uudelleen ja uudelleen, mutta aina otetaan sellainen x, joka on lähempänä kohtaa kuin edellinen x. Tämä on rajankäyntiä!

Esimerkki Olkoon f: $f(x) = \frac{2x^2-1}{x^3-2}$. Määritä derivaatan arvo kohdassa $x_0 = 1$. Aluksi palautetaan mieleen, että

$$f'(x) = \frac{(x^3-2)(4x) - (2x^2-1)(3x^2)}{(x^3-2)^2} = \ldots = \frac{-2x^4 + 3x^2 - 8x}{x^6 - 4x^3 + 4} \,.$$

Ja näin ollen kohdassa $x_0 = 1$:

$$f'(1) = \frac{-2 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1}{1^6 - 4 \cdot 1^3 + 4} = \ldots = -7 \,.$$

Tehdään sitten sama määritelmän kautta
Olkoon ensin $x = 2$. Tällöin **1)**

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) = f(2) - f(1) = \frac{7}{6} - \frac{2-1}{1-2} = \frac{13}{6} \\ \quad x - x_0 \quad = \quad 2 - 1 \quad = 1 \end{cases}$$

2)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{13/6}{1} = \frac{13}{6} \approx 2{,}166 \,.$$

Olkoon sitten $x = 1,1$. Tällöin **1)**

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) = f(1{,}1) - f(1) = -2{,}1225 + 1 = -1{,}12257 \\ \quad x - x_0 \quad = \quad 1{,}1 - 1 \quad = 0{,}1 \end{cases}$$

2)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(1{,}1) - f(1)}{1{,}1 - 1} = \frac{-1{,}12257}{0{,}1} \approx -11{,}2257 \quad .$$

Olkoon sitten $x = 1{,}01$. Tällöin **1)**

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) = f(1{,}01) - f(1) = -1{,}0727 + 1 = -0{,}072704 \\ \quad x - x_0 \quad = \quad 1{,}01 - 1 \quad = 0{,}01 \end{cases}$$

2)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(1{,}01) - f(1)}{1{,}01 - 1} = \frac{-0{,}072704}{0{,}01} \approx -7{,}2704 \quad .$$

Olkoon sitten $x = 1{,}00001$. Tällöin **1)**

$$\begin{cases} f(x) - f(x_0) = f(1{,}00001) - f(1) \approx -0{,}000\,070\,00 \\ \quad x - x_0 \quad = \quad 1{,}00001 - 1 \quad = 0{,}00001 \end{cases}$$

2)

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(1{,}00001) - f(1)}{1{,}00001 - 1} = \frac{-0{,}00007}{0{,}00001} \approx -7{,}00026\,.$$

Näyttäisi siltä , että ($2{,}166 \rightarrow -11{,}2257 \rightarrow -7{,}2704 \rightarrow -7{,}00026$)

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -7\,.$$

Lopuksi, derivaatta f' ilmaisee funktion f *hetkellisen muutosnopeuden* tarkastelukohdassa ($x = x_0$). Geometrinen merkitys on käyrän $y = f(x)$ pisteen $(x_0, f(x_0))$ kautta kulkevan tangentin kulmakertoimen arvo.