Funktion raja-arvo

DIFFERENTIAALI- JA INTEGRALILAKSENNAN JATKOKURSSI, MAA13

Matematiikka	**tarve**	Yhtä vanhoja kuin ihmiskuntakin
algebra	lukumäärien tutkiminen	$\sim$6 000 eKr.
geometria	kuvioiden ja kappaleiden tutkiminen	Antiikin Kreikka
analyysi	*muutosten* tutkiminen	$\sim$1 600 Newton ja Leibniz

Analyysi perustuu raja-arvon käsitteeseen. Mitä rajaton lähestyminen tarkoittaa?

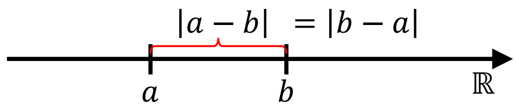
Esimerkki Luvun π rationaaliset likiarvot:

$$\pi_1 \approx 3{,}1\,, \qquad \pi_2 \approx 3{,}14\,, \qquad \pi_3 \approx 3{,}141\,59$$

lähestyvät rajattomasti lukua π, kun oikeiden desimaalien lukumäärä *kasvaa rajatta*.

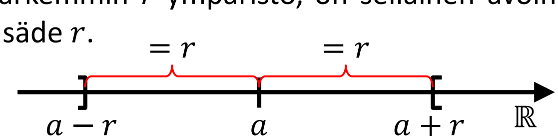
$\Rightarrow$ Nämä ovat hieman epätäsmällisiä ilmauksia, tarkennetaan.

Määritelmä, poikkeama:
Reaalilukujen a ja b välinen *poikkeama* on itseisarvo $|a-b|$.



Huomautus $|a-b| = |b-a|$ eli itseisarvo vastaa vastinkohtien a ja b etäisyyttä lukusuoralla.

Määritelmä, ympäristö:
Reaaliluvun a ympäristö, tarkemmin r-ympäristö, on sellainen avoin väli, jonka keskipiste on a ja säde r.
Toisin sanoen, a:n ympäristö on väli $]a-r, a+r[$.



Esimerkki Luvun 3 0,01-säteinen ympäristö on $]\,3-0{,}01; 3+0{,}01\,[$ eli $]2{,}99\,;\ 3{,}01[\, = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| < 0{,}01\}$.

Muistakaa käyttää erottimena puolipistettä jos välin päätepisteinä on desimaalilukuja.

Esimerkki Tarkastellaan funktiota

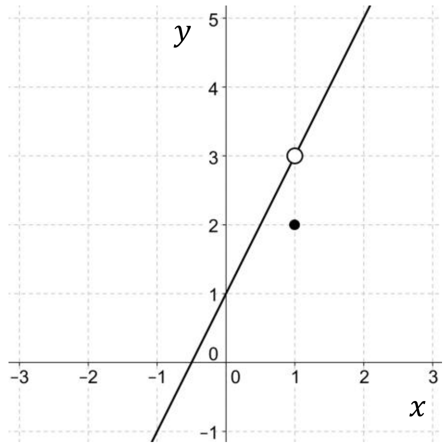
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{kun } x\neq 1\\ 2, & \text{kun } x=1\end{cases}.$$

Laskemalla ja taulukoimalla funktion arvoja havaitaan, että funktion

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0,9	2,8	1,1	3,2
0,99	2,98	1,01	3,02
0,999	2,998	1,001	3,002

raja-arvo kohdassa $x=1$ näyttäisi olevan 3. Tätä merkitään

$$\lim_{x\to 1} f(x)=3$$



$$y=f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{kun } x\neq 1\\ 2, & \text{kun } x=1\end{cases}$$

Ja luetaan: ”limes x lähestyy 1:stä $f(x)$ on 3.” TAI ”limes $f(x)$ on 3, kun x lähestyy 1:stä.” limes=raja (lat)

Vaihtoehtoinen ja usein käytetty tapa on kirjoittaa

$$f(x)\to 3,\qquad \text{kun } x\to 1$$

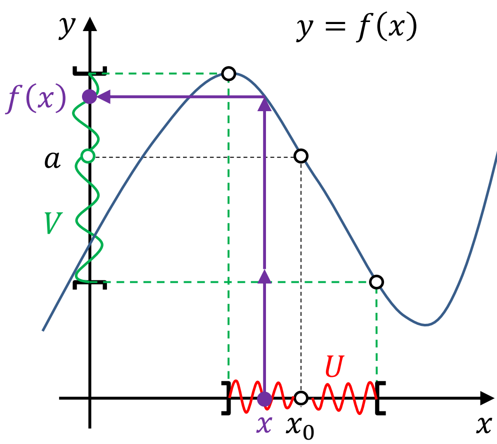
ja luetaan :” $f(x)$ lähestyy 3:sta, kun x lähestyy 1:stä”.

Huomaa vielä, että funktion raja-arvo $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ on eri asia kuin funktion arvo muuttujan arvolla 1, eli $f(1)=2$.

$$\underbrace{\lim_{x\to 1} f(x)=3}_{\substack{f\text{:n raja}-\text{arvo}\\ \text{kohdassa } x=1}}\qquad \underbrace{f(1)=2}_{\substack{f\text{:n arvo}\\ \text{kohdassa } x=1}}$$

Määritelmä, funktion raja-arvo:
Olkoon f määritelty kohdan $x=x_0$ eräässä ympäristössä tätä kohtaa x_0 mahdollisesti lukuun ottamatta. Funktiolla f on kohdassa x_0 raja-arvo a, jos funktion f arvot saadaan mielivaltaisen lähelle lukua a aina, kun muuttujan $x\neq x_0$ arvot valitaan riittävän läheltä lukua x_0. Tällöin merkitään

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a\qquad \text{TAI}\qquad f(x)\to a,\qquad \text{kun } x\to x_0\,.$$



Funktiolla f,

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ei ole raja-arvoa kohdassa $x = 0$.

Täsmällisesti: Kun on annettu luvun a mielivaltainen ympäristö V, niin löytyy luvun x_0 ympäristö U siten, että

$$\forall x \in U \backslash \{x_0\} \implies f(x) \in V \,.$$

Huomautus Funktio f voi olla määritelty tai sitten ei kohdassa x_0. Tällä ei ole merkitystä → raja-arvo voidaan lähes aina määrittää!

Toispuoleiset raja-arvot määritellään lähestymissuunnan mukaan:

$\lim_{x \to x_0 -} f(x)$ on vasemmanpuoleinen raja-arvo ja

$\lim_{x \to x_0 +} f(x)$ on oikeanpuoleinen raja-arvo.

Pätee tärkeä tulos.

Funktiolla f on kohdassa raja-arvo a vain jos toispuoleiset raja-arvot ovat olemassa ja ne ovat samoja, siis

$$\lim_{x \to x_0 -} f(x) = \lim_{x \to x_0 +} f(x) = a = \lim_{x \to x_0} f(x) \;.$$

Esimerkki Olkoon $f : f(x) = 2x + 1$. Kuinka lähellä lukua 1 pitää muuttujan x ($\neq 1$) olla, jotta $|f(x) - 3| < 0{,}01$?

Ratkaisu Kun $x \neq 1$, niin

$$|f(x) - 3| < 0{,}01 \iff |\overbrace{(2x+1)}^{= f(x)} - 3| < 0{,}01$$

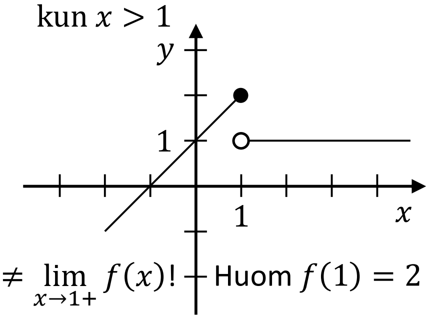
$$|(2x+1)-3| < 0{,}01 \quad \Leftrightarrow \quad |2x-2| < 0{,}01 \qquad |:2$$
$$\Leftrightarrow \quad |x-1| < 0{,}005$$

Eli, muuttujan x pitää poiketa vähemmän kuin 0,005 luvusta 1 (itseis-arvo → etäisyys!)

$$\Longrightarrow \quad x \in \,]0{,}995\,;1{,}005[\setminus\{1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-1| < 0{,}005\}\,.$$

Esimerkki Paloittain määritelty funktio. Määritä $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$, kun

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{kun } x \le 1 \\ 1, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$



Nyt

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x+1) = 2,$$

mutta

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} 1 = 1.$$

Siis eri → raja-arvoa ei ole, $\lim\limits_{x \to 1-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1+} f(x)$! Huom $f(1) = 2$

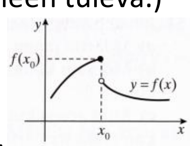
Funktion jatkuvuus

DIFFERENTIAALI- JA INTEGRALILAKSENNAN JATKOKURSSI, MAA13

Intuitiivinen ajatus jatkuvuudesta on: yhtenäinen, katkeamaton, kuvaa-ja voidaan piirtää nostamatta kynää paperista, jne.
(Intuitiivinen = välittömästi tajuttu, luontainen, aistillinen, spontaani, ei-opittu, "ekana" mieleen tuleva.)

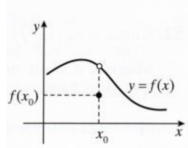
OK, entä matemaat-tisesti?
→ Tarkastellaan kuvia.

Minkä johtopäätök-sen näistä voi tehdä?



Funktiolla f ei ole raja-arvoa kohdassa x_0.
Käyrä katkeaa kohdassa x_0.

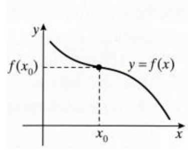
Syy: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$



Raja-arvo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ on olemassa, mutta se ei ole sama kuin $f(x_0)$.
Käyrä katkeaa kohdassa x_0.

kohdassa x_0

↳ Syy: $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0-} f(x)$



Raja-arvo $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ja funktion arvo $f(x_0)$ ovat samat. Käyrä on katkeamaton ja funktio jatkuva kohdassa x_0.

Tullaan tulokseen, että kun kohdassa $x_0 \in \mathcal{M}_f$ funktion raja-arvo on sama kuin funktion arvo, niin silloin funktio f on jatkuva kohdassa. Eli f:n kuvaaja, käyrä $y = f(x)$, on katkeamaton.

Määritelmä, funktion jatkuvuus:
Olkoon f määritelty kohdan x_0 eräässä ympäristössä. Funktio f on jatkuva kohdassa x_0, jos sen raja-arvo ja arvo ovat yhtäsuuret, eli

$$f \text{ jatkuva } x_0\text{:ssa} \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \text{ on olemassa ja } \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Jos f ei ole jatkuva, niin se on epäjatkuva kyseisessä kohdassa $x = x_0$.

Lisäksi sanotaan, että

- funktio f on jatkuva välillä I / joukossa A, jos se on jatkuva $\forall x \in I/A$,
- funktio f on vasemmalta (oikealta) jatkuva kohdassa x_0, jos sen vasemmanpuoleinen (oikeanpuoleinen) raja-arvo on yhtäsuuri kuin funktion arvo.

Esimerkki **a)** Funktio f, määriteltynä lausekkeilla

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{kun } x \leq 1 \\ -x + 3, & \text{kun } x > 1 \end{cases}$$

on jatkuva kohdassa $x = x_0 = 1$, sillä

$$\lim_{x \to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} (x^2 + 1) = 1^2 + 1 = 2$$

ja

$$\lim_{x \to 1+} f(x) = \lim_{x \to 1+} (-x + 3) = -1 + 3 = 2$$

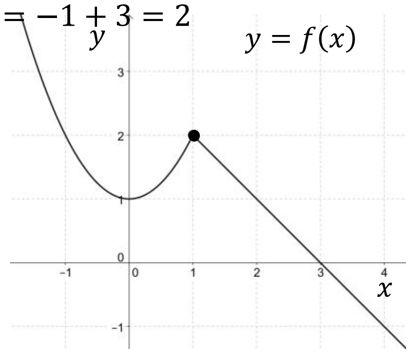
ovat samat, eli

$$\lim_{x \to 1} f(1) = 2.$$

Sekä lisäksi

$$f(1) = 1^2 + 1 = 2,$$

$$\Rightarrow \quad f(1) = \lim_{x \to 1} f(1) = 2.$$



Esimerkki **b)** Funktio f: $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{kun } x < 0 \\ x^2 - x, & \text{kun } x \geq 0 \end{cases}$ ei ole jatkuva kohdassa $x_0 = 0$, sillä

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x\to 0+} f(x)\ .$$

c) Funktio f: $f(x) = \sqrt{x}$ on jatkuva kohdassa $x_0 = 0$, sillä

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0 \quad (= f(0) = 0)\ .$$

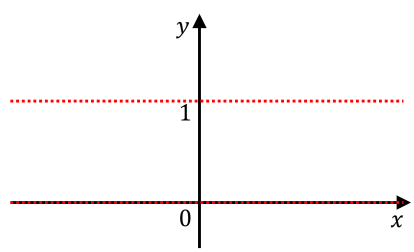
d) Funktion f: $f(x) = \frac{1}{x}$ jatkuvuutta kohdassa $x_0 = 0$ ei tiedetä, sillä f ei ole määritelty 0:ssa. Jos määritellään $f(0) = 0$, eli

$$f\colon\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \text{kun } x \neq 0 \\ 0, & \text{kun } x = 0 \end{cases}\ ,$$

niin tällöin f on epäjatkuva kohdassa $x_0 = 0$.

Esimerkki **e)** Kaikkialla epäjatkuva funktio on esim. $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

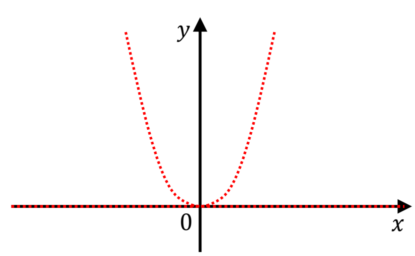
$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \end{cases}\ .$$



Toisaalta funktio $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{kun } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

on jatkuva kohdassa $x_0 = 0$, mutta ei missään muussa kohdassa.



Huomautus Kaikki alkeisfunktiot ovat jatkuvia määrittelyjoukoissaan. Erityisesti kaikki polynomifunktiot ovat jatkuvia kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Huomautus (jatkuu) Jatkuvuus määriteltiin raja-arvojen kautta → Näin ollen jos funktiot f ja g ovat jatkuvia kohdassa x_0, niin jatkuvia (kohdassa x_0) ovat myös funktiot

$$f \pm g, \qquad f \cdot g, \qquad \frac{f}{g}, g \neq 0, \qquad c \cdot f, c \in \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad h = g(f)\,.$$

Jos f on jatkuva, niin siitä seuraa, että myös $|f|$ on jatkuva, katso kuvat alla.
Toisinpäin ei päde, esimerkiksi funktio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ -1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

ei ole missään jatkuva, mutta itseisarvofunktio on kaikkialla jatkuva.