DIFF.&INT.LASK. JAT-KOKURSSI, MAA13

Kertausta, joukkoja ja kuvauksia

MÄÄRITELMIÄ ja KÄSITTEITÄ:

Merkittyä laskutoimitusta, jossa on yksi tai useampi tuntematon tai pelkkää (reaali)lukua sanotaan *lausekkeeksi*. Esimerkiksi

$$x-2, \qquad 5x+\pi, \qquad \frac{\frac{3}{4}-x}{x^2-1}, \qquad 18{,}4\,, \qquad \text{jne.}$$

Kun kaksi lauseketta asetetaan yhtäsuuruusmerkillä $=$ yhtäsuuriksi, saadaan *yhtälö*. Esimerkiksi

$$5x-2=4x, \qquad \sqrt{3}x=e^x-1, \qquad \text{jne.}$$

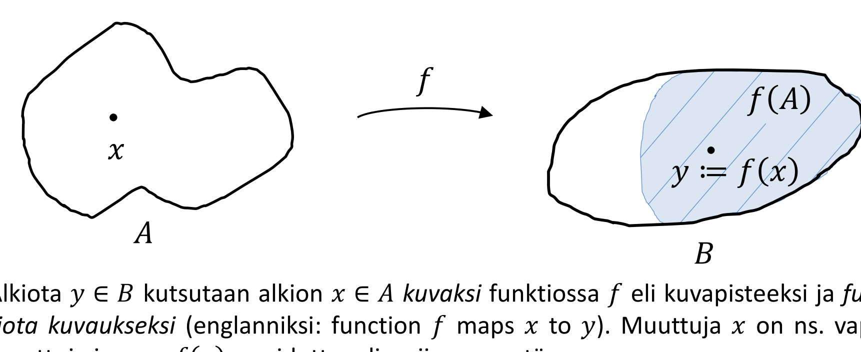
Vastaavasti *epäyhtälöt*, tällöin merkin $=$ tilalla on jokin seuraavista merkeistä: $<, >, \leq, \geq$ tai $\neq$.

Yhtälöt ja epäyhtälöt sisältävät siis muuttujan, usein x, joskus t. Sitä muuttujan x (tai t) arvoa, joka toteuttaa yhtälön sanotaan *yhtälön ratkaisuksi* eli *juureksi*. Epäyhtälöillä on vastaavasti lähes aina *ratkaisuväli tai -välejä*, toisinaan myös yksittäisiä ratkaisuja ratkaisuväli(e)n lisäksi tai sitten erikseen. Yleisesti $a, b, c, \ldots$ ovat vakioita (tunnettuja) ja $x, y, z, \ldots$ muuttujia (tuntemattomia).

Funktio on sääntö/vastaavuus, joka liittää jokaiseen määrittelyjoukon alkioon täsmälleen yhden maalijoukon alkion.
(Määrittelyjoukon alkio voidaan samaistaa lähtöjoukon sallittuun alkioon.) ***Siis jokaiselle lähtöjoukon A sallitulle alkiolle x liitetään tasan yksi maalijoukon B alkio y.*** *Merkitään*

$$f: A \to B, \qquad x \mapsto y := f(x),$$

ja luetaan: ”Funktio f joukosta A joukkoon B siten, että alkio x kuvautuu alkioksi $f(x)$, joka määritellään y:ksi.”

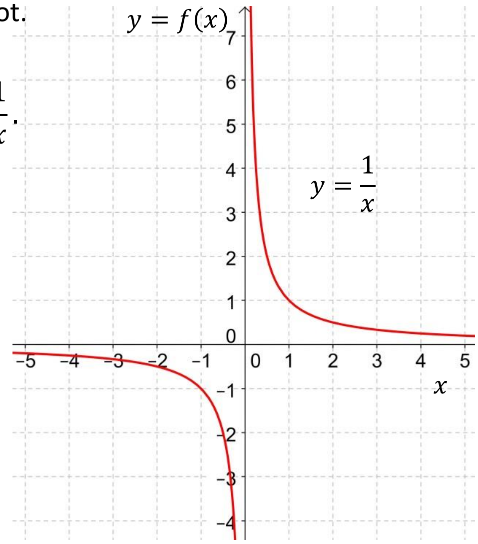


Alkiota $y \in B$ kutsutaan alkion $x \in A$ *kuvaksi* funktiossa f eli kuvapisteeksi ja *funktiota kuvaukseksi* (englanniksi: function f maps x to y). Muuttuja x on ns. vapaa muuttuja ja $y := f(x)$ on sidottu, eli y riippuu x:stä.

Lähtöjoukko ja määrittelyjoukko sekä maalijoukko ja kuvajoukko:

Esimerkki: Tarkastellaan funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \longmapsto y = \frac{1}{x}$. Tästä nähdään suoraan lähtö- ja maalijoukot.

$$f\colon \overbrace{\mathbb{R}}^{\substack{\text{lähtö}-\\ \text{joukko}}} \to \overbrace{\mathbb{R}}^{\substack{\text{maali}-\\ \text{joukko}}}, \qquad x \overbrace{\longmapsto}^{\text{kuvautuu}} \frac{1}{x}.$$



$$\text{Lähtöjoukko: } \mathbb{R}$$
$$\mathcal{M}_f = \text{Määrittelyjoukko: } \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

kuvataan vaaka-akselille

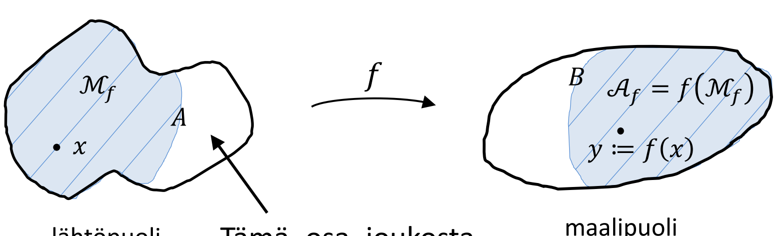
$$\text{Maalijoukko: } \mathbb{R}$$
$$\mathcal{A}_f = \text{Arvojoukko: } \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

kuvataan pystyakselille

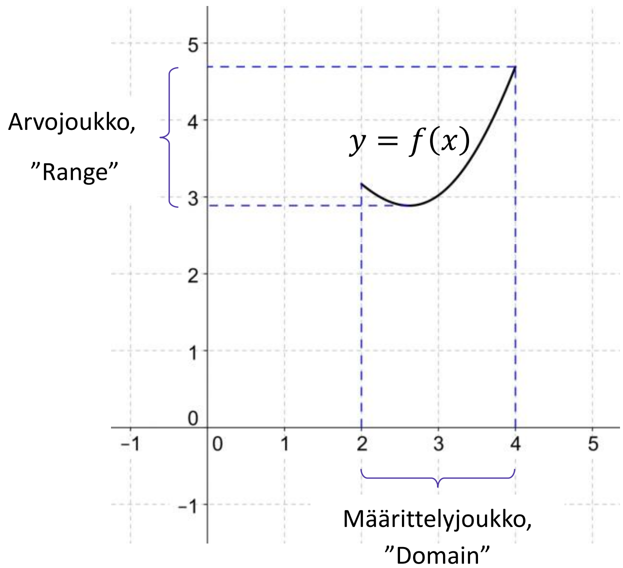
Joukoille pätee: $\mathcal{M}_f \subset A$, usein $\mathcal{M}_f = A$ ja $f(A) = \mathcal{A}_f \subseteq B$ aina. Kuvajoukolle $f(C)$, kun $C \subseteq A$ voidaan kirjoittaa $f(C) = \{y \in B \mid y = f(x) \text{ jollakin } x \in C\}$.

Lähtö- ja määrittelyjoukko asetetaan usein samaksi tai on sama. Jos tarkastellaan funktioperhettä (eli useita funktioita), niin tällöin voidaan sanoa, että kaikille funktioille lähtöjoukko on esim. $A = \mathbb{R}$, mutta esim.

$$\mathcal{M}_{f_1} = \mathbb{R}_+, \qquad \mathcal{M}_{f_2} = \mathbb{R} = A, \qquad \mathcal{M}_{f_3} = \{x \in A \mid x > -1000\},$$
$$\mathcal{M}_{f_4} = \mathbb{R} = A, \qquad \text{jne.}$$



Tämä osa joukosta A ei kuvaudu funktiossa f mihinkään.



Erilaisia funktioita eli kuvauksia:

A. Injektiivinen kuvaus eli injektio on sellainen kuvaus eli funktio, joka kuvaa eri pisteet eri pisteiksi, ns. "one-to-one" kuvaus. Parempi olisi sanoa: …*kuvaa eri muuttujan arvot eri funktion arvoiksi*, kuin eri pisteet eri pisteiksi. Siis ehdosta $x_1 \neq x_2 \in A$ seuraa $f(x_1) \neq f(x_2) \in B$.

Esimerkkejä
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3$, on injektio. Eri luvut kuvautuvat eri luvuiksi.
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$, ei ole injektio, sillä -1 ja 1 kuvautuvat molemmat 1:ksi ja toisaalta luku a ja sen vastaluku $-a$ molemmat kuvautuvat luvuksi a^2, kunhan $a \neq 0$, mutta rajoittumafunktio $g_{|\mathbb{R}_+ \cup \{0\}}$ eli
$g: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$, on injektio. **Muutettiin siis lähtöjoukkoa!**

Rajoittumafunktion määritelmä tulee myöhemmin.

Injektiivisyyden osoitus lähes aina tehdään hyödyntäen kontrapositio-lakia → kurssi 11. Eli $A \Longrightarrow B \Longleftrightarrow \neg B \Longrightarrow \neg A$

B. Surjektiivinen kuvaus eli surjektio on kuvaus, "joka täyttää koko maalijoukon". Siis jokaiselle $y \in B$ on olemassa jokin $x \in A$ (huom. voi olla useita eri x:iä) siten, että $y = f(x)$. Eli f on surjektio jos $f(A) = B$.

Esimerkkejä
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3$, on surjektio.
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^2$, ei ole surjektio, sillä $\nexists x \in A$ siten, että $g(x) < 0$, mutta
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad x \longmapsto x^2$, on surjektio. **Muutettiin siis maalijoukkoa!**

C. Bijektiivinen kuvaus eli bijektio on kuvaus, joka on sekä injektio että surjektio. Bijektiiviset kuvaukset ovat tärkeitä, koska niillä on aina olemassa käänteiskuvaus. Muista/Kertaa kurssin 8 asiat.

Esimerkkejä
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x^3 = y$, on bijektio, käänteiskuvauksena

$$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad y \longmapsto \sqrt[3]{y} = x.$$

$g: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad x \longmapsto x^2 = y$, on bijektio, käänteiskuvauksena

$$g^{-1}: \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad y \longmapsto \sqrt{y} = x.$$

Bijektiivisen kuvauksen (eli funktion) käänteiskuvaus on myös bijektio! Näin ollen jos $f: A \to B$ ja $f^{-1}: B \to A$, niin

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \qquad \forall\, x \in A \text{ ja}$$

$$(f \circ f^{-1})(y) = y, \qquad \forall\, y \in B.$$

HUOM! Injektiivinen kuvaus (funktio) on arvojoukolleen bijektio. Eli jos f on injektio, niin

$$f: A \to f(A)$$

on bijektio.

Määritelmä, funktion rajoittuma eli rajoittumafunktio:
Olkoon $f: A \to B$ ja $g: C \to D$ sekä $C \subset A$. Mikäli $f(x) = g(x) \;\; \forall x \in C$, niin sanotaan, että funktio g on funktion f *rajoittuma* eli *rajoittumafunktio*, merkitään $g = f_{|C}$. Esimerkiksi, jos

$$\begin{cases} f(x) = x^2, & f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = x^2, & g: [0, \infty] \to \mathbb{R} \end{cases}, \qquad \text{niin} \quad g = f_{|[0,\infty]}.$$

KOTITEHTÄVÄT: Mieti funktioiden lähtö-, määrittely-, maali- ja arvojoukot. Onko funktio injektio, surjektio tai jopa bijektio? Miten saisit (esim. joukkoja muuttamalla) funktion bijektioksi?
Laskin auttaa. Ei tarvitse tehdä tarkkoja todistuksia, kuvaajien avulla tehtävät perustelut kelpaavat.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^4$
b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^5$
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$, missä n parillinen,$n \in \mathbb{N}$.
d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^n$, missä n pariton,$n \in \mathbb{N}$.
e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt{x}$
f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt[3]{x}$
g) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$, missä n parillinen,$n \in \mathbb{N}$.
h) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sqrt[n]{x}$, missä n pariton,$n \in \mathbb{N}$.
i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{x^n} = (\sqrt[m]{x})^n$, missä $m \neq 0$ ja $m, n \in \mathbb{Z}$ sekä $x > 0$.
j) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto a^x$, missä $0 < a < 1$.
k) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto a^x$, missä $a = 1$.
l) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto a^x$, missä $a > 1$.
m) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \log_a x$, missä $0 < a < 1$.
n) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto \log_a x$, missä $a > 1$.