Ääriarvotehtävät kahden muuttujan funktioille

DIFFERENTIAALI- JA INTEGRALILAKSENNAN JATKOKURSSI, MAA13

Oletetaan tunnetuksi osittaisderivaatat kahden muuttujan reaaliarvoiselle funktiolle

$$f: f(x,y): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (x,y) \mapsto z \coloneqq f(x,y)\ ,$$

Nehän siis ovat (monet merkintätavat)

$$D_x f(x,y), \qquad D_y f(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$$

$$f_x'(x,y), \qquad f_y'(x,y)$$

Esimerkki Olkoon funktio $f: f(x,y) = x^2 y - 2\cos(xy - y^2)$

Tällöin esim. $D_x f(x,y) = 2xy + 2\sin(xy - y^2) \cdot y$ jne.

Milloin funktiolla $f: f(x,y): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ voi olla ääriarvopiste?

Osoittautuu (differentiaalilaskennan teorian kautta), että *välttämätön ehto* ääriarvopisteelle $a \in \mathbb{R}^2$ on gradientin häviäminen, eli $\nabla f(a) = 0$.
→ Mikä on gradientti? Se on vektori, joka muodostuu osittaisderivaatoista

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \right)$$

Siis ehto ääriarvopisteelle $a = \left(a_x, a_y\right) = (x,y)$ on

$$\frac{\partial f\left(a_x, a_y\right)}{\partial x} = 0 \qquad \text{ja} \qquad \frac{\partial f\left(a_x, a_y\right)}{\partial y} = 0\ .$$

Huomautus
Pisteitä, joissa $\nabla f(a) = 0$ sanotaan *kriittisiksi pisteiksi*. Niitä ovat funktion min- ja max-pisteiden lisäksi funktion kuvaajapinnan ns. satulapisteet.

Seurauslause
Jälleen osoittautuu (differentiaalilaskennan teorian kautta), että kriittinen piste $a \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on funktiolle $f: f(x,y): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i) Lokaali aito minimipiste, jos

$$\Delta_2(a) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} > 0$$

ii) Lokaali aito maksimipiste, jos

$$\Delta_2(a) = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y}\right)^2 > 0 \quad \text{ja} \quad \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} < 0$$

iii) Satulapiste, jos $\Delta_2(a) < 0$.

Merkinnällä $\Delta_2(a)$ tarkoitetaan seuraavaa determinanttia pisteessä a:

$$\Delta_2(a) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f(a)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x \partial y}\right)^2$$

Esimerkki Määritetään lokaalit ääriarvot funktiolle

$$f: f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Ensin kriittiset pisteet: Yhtälö

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y, 3y^2 - 3x) = 0$$

toteutuu (lasku) täsmälleen silloin, kun $(x,y) = (0,0)$ ja $(x,y) = (1,1)$.

Sitten laatu (min / max /satula): Determinantiksi tulee

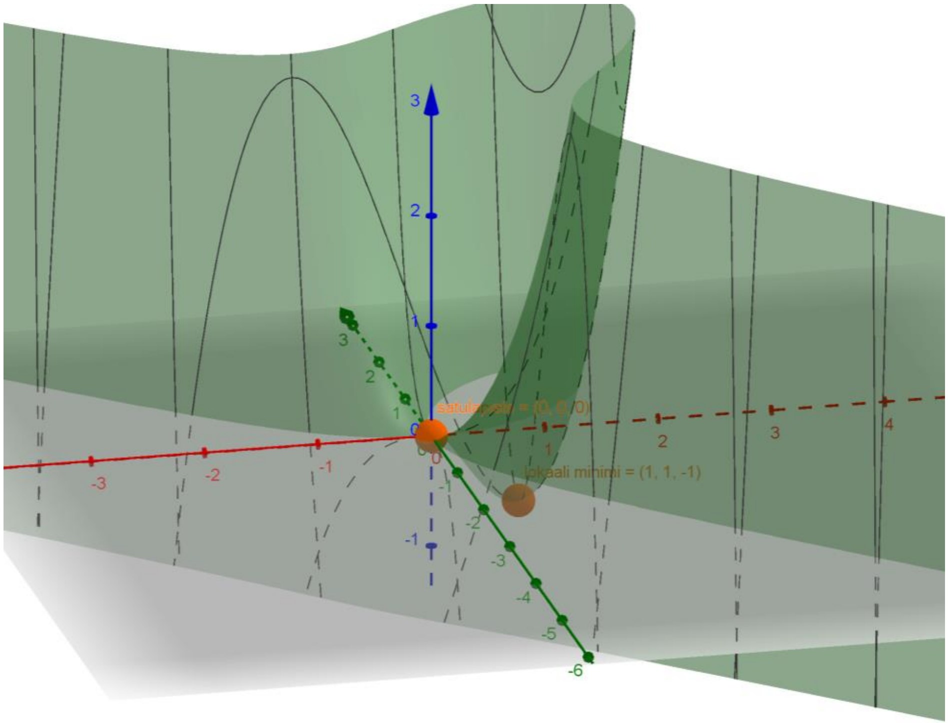
$$\Delta_2(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$$

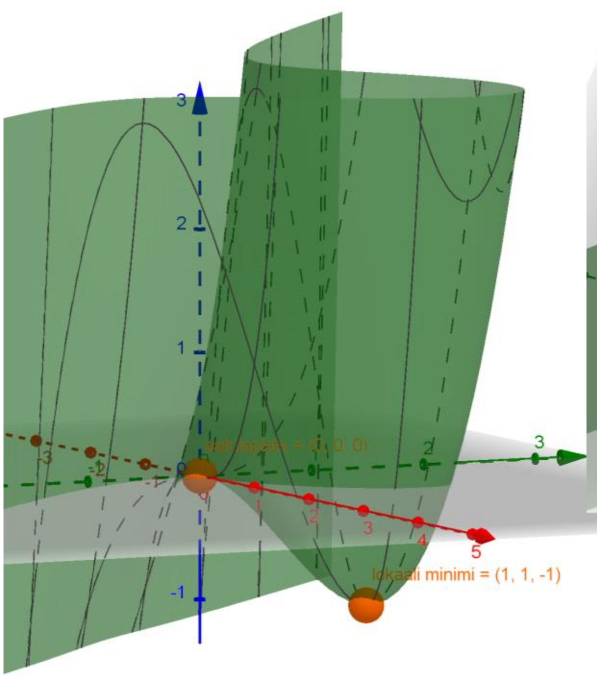
→ Pisteessä $(0,0)$ on $\Delta_2(0,0) = -9 < 0$, joten $(0,0)$ on satulapiste ja

pisteessä $(1,1)$ on $\Delta_2(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0$ ja $\frac{\partial^2 f(1,1)}{\partial x^2} = 6 > 0$, siis

$(1,1)$ on lokaali minimipiste.

Piirretään lopuksi kuvaaja Geogebralla!


satulapiste = (0, 0, 0)
lokaali minimi = (1, 1, -1)


satulapiste = (0, 0, 0)
lokaali minimi = (1, 1, -1)