

VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!

MAOL/LIITE/taulukot.com JA LASKIN ON SALLITTU ELLEI TOISIN MAINITTU!

TARKISTA TEHTÄVÄT TESTIN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

Ratkaise tehtävät 1 ja 2 ilman teknisiä apuvälineitä!

1. a) Onko väite A–D oikein vai väärin? (3p)

A Jos jatkuvan funktion f derivaatta on kaikkialla positiivinen,

funktiolla on käänteisfunktio.

oikein/väärin

B Vain kasvavalla funktiolla voi olla käänteisfunktio.

oikein/väärin

C Tiedetään, että funktiolla f on käänteisfunktio ja että

$$f(1) = 2, f(3) = 4 \text{ ja } f(5) = 3. \text{ Tällöin } f^{-1}(4) = 3.$$

oikein/väärin

D Funktion $f(x) = \sqrt{x+3}, x \geq -3$ käänteisfunktion määrittelyjoukko on $x \geq -3$.

oikein/väärin

b) Yhdistä funktioon $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$ liittyvät oikeat kohdat A–D ja I–IV. (3p)

A $f(1,1)$ I 0

B $f(2,1)$ II 1

C $f'_x(1,1)$ III 2

D $f'_y(0,1)$ IV 3

c) Onko funktion $f(x, y) = x + 2y - 3$ liittyvä väite A–D oikein vai väärin? (3p)

A Funktion kuvaajalla on piste $(1, 2, -3)$.

oikein/väärin

B Funktion kuvaaja leikkaa x -akselin pisteessä $(3, 0, 0)$.

oikein/väärin

C Funktion tasa-arvokäyrä xy -tasossa on suora $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$.

oikein/väärin

D Funktiolla voi olla ääriarvopisteenä $(0, 0, -3)$.

oikein/väärin

d) Määritä funktion $f: f(x) = \sqrt[3]{x^2}, x > 0$ derivaattafunktio käänteisfunktion derivaatan avulla. (3p)

2. a) Määritä funktion f osittaisderivaatat ja niiden likiarvot pisteessä $(1,2)$, kun (6p)

i)

$$f(x, y) = 2xy - 3y$$

ii)

$$f(x, y) = x\sqrt{y} - 3 \cdot e^{\sin x - y}$$

iii)

$$f(x, y) = \ln(2x - 3) - \sqrt[5]{y}$$

b) Osoita, että funktiolla $f: [-3,5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x + 6}$ on käänteisfunktio. Muodosta funktion f käänteisfunktion lauseke ja määritä funktion f^{-1} määrittelyjoukko. (4p)

c) Ovatko funktiot f ja g toistensa käänteisfunktioita? Perustele. (2p)

$$f: f(x) = \ln x, \quad g: g(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

/12

Tehtävästä 3 alkaen tekniset apuvälineet ovat sallittuja!

3. a) Määritä funktion

(6p)

$$f: f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{4}} + 5, \quad -30 \leq x \leq 6$$

käänteisfunktio f^{-1} sekä käänteisfunktion määrittely- ja arvojoukot $(\mathcal{M}_{f^{-1}}, \mathcal{A}_{f^{-1}})$ sekä määritä $(f^{-1})'(4)$ funktion f derivaatan f' avulla.

b) Voidaanko funktio $f: f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ määritellä pisteessä $(0,0)$ niin, että funktio f on jatkuva. (6p)

Ohje: Piirrä ensin Geogebralla kuva. Lähesty sitten pistettä $(0,0)$ pitkin x -akselia, eli kun $y = 0$ (kuvaajasta katsoen) ja päätele raja-arvo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

Lähesty sitten pistettä $(0,0)$ pitkin y -akselia, eli kun $x = 0$ (kuvaajasta katsoen) ja päätele raja-arvo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y).$$

Vastaavasti pitkin suoria $y = x$ ja $y = -x$. Tee johtopäätös, lisää kuvia

4. a) Funktion $f: f(x, y) = y \cdot \sqrt{4 - x^2} - 0.5 \cdot x \cdot \sqrt{4 - y^2}$ kuvaajaa leikataan tasolla $y = 1$. Määritä jokin pisteeseen $P = (0, 1, 2)$ asetetun suoran suuntavektori, kun suora on funktion f kuvaajan ja tason $y = 1$ leikkauskäyrän tangentti. (6p)

b) Piirrä funktion $f: f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy^2$, $(x, y) \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right] \times \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ tasa-arvokäyrästä 1:n väleihin (hyödynnä liukukytkintä ja jälki käyttöön komentoa geogebraassa) sekä määritä kriittiset pisteet ja niiden laatu. (6p)

Ohje: Merkintä $(x, y) \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right] \times \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ tarkoittaa sitä, että x :n arvot ovat $-3/2$:sta 2 :een ja y :n arvot $-\frac{5}{2}$:sta $\frac{5}{2}$:een, eli geogebraan kirjoita:

Jos($-3/2 \leq x \leq 2$, Jos($-5/2 \leq y \leq 5/2$, $x^4 + y^4 - 4x y^2$))

Hyödynnä laadun määrittämisessä tunnilla käytyä differentiaalilaskennan seurauslausetta.

/12

/48
