

Nimi:

VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!

MAOL/LIITE/taulukot.com JA LASKIN ON SALLITTU ELLEI TOISIN MAINITTU!

TARKISTA TEHTÄVÄT TESTIN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

---

**Ratkaise tehtävät 1 ja 2 ilman teknisiä apuvälineitä!**

1. a) Onko väite A–D oikein vai väärin? (2p)

A Epäoleellinen integraali tarkoittaa integraalia, jonka arvo on nolla. oikein/väärin

B Epäoleellinen integraali tarkoittaa määrätyn integraalin raja-arvoa. oikein/väärin

C Tiheysfunktiolle  $f$  pätee  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ . oikein/väärin

D Epäjatkuva funktio ei voi olla minkään satunnaismuuttujan tiheysfunktio. oikein/väärin

b) Laske välivaiheineen. (6p)

i)

$$\int_1^{\infty} \frac{3}{x^4} dx$$

ii)

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

iii)

$$\int_{-\infty}^1 \frac{e^x}{5} dx$$

c) Määritä (välivaiheet näkyviin)

(4p)

$$\int \ln(3x - 2) dx.$$

Vihje: Kaksi eri integroimismenetelmää, ensin muuttujanvaihto ja sitten osittaisintegrointi.

**/12**

2. a) Millä vakion  $a$  arvolla funktio

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{kun } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan  $\underline{x}$  tiheysfunktio?

b) Laske todennäköisyys  $P(\underline{x} < \frac{2}{3})$ .

c) Millä vakion  $c$  arvolla  $P(\underline{x} > c) = \frac{1}{3}$ ?

jatka toiselle puolelle



**Tehtävästä 3 alkaen tekniset apuvälineet ovat sallittuja!**

3. a) Huoneen lattia on neliö, jonka sivujen pituus on 4,0 metriä. Lattialta etsitään pudonnutta helmeä. Olkoon satunnaismuuttuja  $X$  helmen etäisyys lähimmästä seinästä. (12p)

i) Määritä kertymäfunktio  $F$  todennäköisyyden  $P(X \leq x) = F(x)$  avulla ja  $P(X \leq 0,5)$ .

Ohje: Mieti minkäkokoinen on alue kun ollaan  $x$  metriä seinästä ja sen osuus koko alueesta (eli geometrinen todennäköisyys). Muuttuja  $x$  kuvaa siis etäisyyttä lähimmästä seinästä, eli  $P(X \leq x) = F(x) = 0$ , kun  $x < 0$ . Eli yhtään todennäköisyyttä ei ole kertynyt, kun helmen etäisyys seinästä on jotain negatiivista, OK. Vastaavasti, kun muuttuja  $x > 2$ , niin  $P(X > 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2) = 0$ , eli  $F(2) = 1$ . Siis kaikki todennäköisyys on jo kertynyt kohtaan  $x = 2$  saakka!

ii) Määritä tiheysfunktio  $f$ . Jos  $F$  tunnetaan ja  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$ , niin  $f$  saadaan  $F$ :stä ...imalla.

iii) Piirrä  $F$ :n ja  $f$ :n kuvaajat.

iv) Määritä satunnaismuuttujan  $X$  odotusarvo  $\mathbb{E}(X)$ . ( $\mathbb{E}$  = Expected value)



4. a) Määritä funktion  $f(x) = xe^{-x^2}$  kuvaajan ja  $x$ -akselin rajaaman alueen pinta-ala. Määritä tämän alueen pyöräyttäessä  $x$ -akselin ympäri syntyvän kappaleen tilavuus (laskin). (6p)

**b) Funktio**

(6p)

$$f: f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{kun } x \leq -\ln 2 \\ \frac{1}{10}, & \text{kun } -\ln 2 < x \leq \ln 2 \\ 0.722741127776 \cdot e^{-x}, & \text{kun } \ln 2 < x \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan  $X$  tiheysfunktio. Määritä kertymäfunktio  $F$  ja laske  $P(X > 0)$ . Määritä lisäksi odotusarvo  $\mathbb{E}(X)$  ja keskihajonta  $\mathbb{D}(X)$  varianssin  $\mathbb{D}^2(X)$  kautta.

<b>/12</b>
------------

<b>/48</b>
------------