Matematiikan TESTI 3, Maa13 – Diff.-ja int.-laskennan jatkokurssi – RATKAISUT **Sievin lukio**
III jakso/2018 **Nimi:**
VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!
MAOL/LIITE/taulukot.com JA LASKIN ON SALLITTU ELLEI TOISIN MAINITTU!
TARKISTA TEHTÄVÄT TESTIN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

Ratkaise tehtävät 1 ja 2 ilman teknisiä apuvälineitä!

1. a) Onko väite A–D oikein vai väärin? (2p)

A Epäoleellinen integraali tarkoittaa integraalia, jonka arvo on nolla. oikein/väärin

B Epäoleellinen integraali tarkoittaa määrätyn integraalin raja-arvoa. oikein/väärin

C Tiheysfunktiolle f pätee $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. oikein/väärin

D Epäjatkuva funktio ei voi olla minkään satunnaismuuttujan tiheysfunktio. oikein/väärin

VASTAUKSET: A–väärin, B–oikein, C–oikein, D–väärin

b) Laske välivaiheineen. (6p)

i)

$$\int_1^{\infty} \frac{3}{x^4}\,dx$$

ii)

$$\int_0^{3} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

iii)

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{e^x}{5}\,dx$$

VASTAUS:

i)

$$\int_1^{\infty} \frac{3}{x^4}\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_1^{a} 3\cdot x^{-4}\,dx = \lim_{a\to\infty} \mathop{/}_{1}^{a} 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot x^{-3} = \lim_{a\to\infty}\left(-a^{-3}+1^{-3}\right) = 1$$

ii)

$$\int_0^{3} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{a\to 0+} \int_a^{3} x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{a\to 0+} \mathop{/}_{a}^{3} 2\cdot x^{\frac{1}{2}} = \lim_{a\to 0+}\left(2\cdot\sqrt{3} - 2\cdot\sqrt{a}\right) = 2\sqrt{3} \approx 3{,}464$$

iii)

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{e^x}{5}\,dx = \lim_{a\to -\infty} \int_a^{1} \frac{e^x}{5}\,dx = \lim_{a\to -\infty} \mathop{/}_{a}^{1} \frac{e^x}{5} = \lim_{a\to -\infty}\left(\frac{e^1}{5} - \frac{e^a}{5}\right) = \frac{e}{5} \approx 0{,}5436$$

c) Määritä (välivaiheet näkyviin) (4p)

$$\int \ln(3x-2)\,dx.$$

Vihje: Kaksi eri integroimismenetelmää, ensin muuttujanvaihto ja sitten osittaisintegrointi.

VASTAUS:

Aluksi havaitaan, että $x > \frac{2}{3}$, jotta saataisiin jotain reaalista. Tehdään muuttujanvaihto, eli käytetään sijoitusfunktiota $u = u(x) = 3x - 2$. Tällöin differentiaaleille pätee yhtälö $du = 3dx$, josta $dx = \frac{1}{3}du$. (Voidaan myös päätellä näin: koska sijoitusfunktio $u = u(x)$, niin $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3$, eli $\frac{du}{3} = dx$.)

$$\int \ln\Big(\underbrace{3x-2}_{=u}\Big)\underbrace{dx}_{=\frac{1}{3}du} = \int \ln(u)\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \ln(u)\,du\,.$$

Integraaliin $\int \ln(u)\,du$ käytetään joko laskinta, taulukkokirjan antamaa kaavaa tai osittaisintegroidaan. Saadaan

$$\frac{1}{3}\int \ln(u)\,du = \frac{1}{3}\int 1\cdot\ln(u)\,du \overset{\text{OS.INT.}}{=} \frac{1}{3}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{3}\int u\cdot\frac{1}{u}du = \frac{1}{3}u\cdot\ln(u) - \frac{1}{3}u + C.$$

Lopuksi sijoitetaan takaisin $u = 3x - 2$, eli

$$\begin{aligned}\int \ln(3x-2)\,dx &= \frac{1}{3}(3x-2)\cdot\ln(3x-2) - \frac{1}{3}(3x-2) + C\\ &= \frac{1}{3}(3x-2)\cdot\ln(3x-2) - x + \underbrace{\frac{2}{3}+C}_{=C'}\\ &= \frac{1}{3}(3x-2)\cdot\ln(3x-2) - x + C'.\end{aligned}$$

Vastaukseksi saadaan

$$\int \ln(3x-2)\,dx = \frac{1}{3}(3x-2)\cdot\ln(3x-2) - x + C', \quad x > \frac{2}{3}.$$

/12

2. **a)** Millä vakion a arvolla funktio

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & \text{kun } -1 \le x \le 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio?

b) Laske todennäköisyys $P(\underline{x} < \frac{2}{3})$.

c) Millä vakion c arvolla $P(\underline{x} > c) = \frac{1}{3}$?

VASTAUS:

a) Jotta funktio $f(x)$ olisi jonkin satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio, niin täytyy päteä kolme vaadittavaa ehtoa. Käydään ehdot i) - iii) läpi:

i) $f(x) \geq 0$ *kaikilla* $x \in \boldsymbol{R}$. Selvästi vakiofunktio $0 \geq 0$, lisäksi polynomifunktio $ax^2 \geq 0$, kun $a \geq 0$. Siis vakiolle a pitää päteä $a \geq 0$.

ii) f *on jatkuva kaikkialla paitsi mahdollisesti äärellisen monessa kohdassa*. Koska vakiofunktio $g(x) = 0$ ja polynomifunktio $h(x) = ax^2$ ovat kaikkialla jatkuvia, niin funktion f mahdollisia epäjatkuvuuskohtia on funktion f määritelmän nojalla korkeintaan kaksi, siis äärellinen määrä. Nämä kohdat ovat $x = \pm 1$, kun $a \neq 0$.

iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Määritetään vakio a siten, että iii)-kohdan integraaliehto täyttyy. Funktion f määritelmän ja integraalin ominaisuuden nojalla epäoleellinen integraali häviää

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dx + \int_{-1}^{1} ax^2\,dx + \int_{1}^{\infty} 0\,dx = \int_{-1}^{1} ax^2\,dx$$

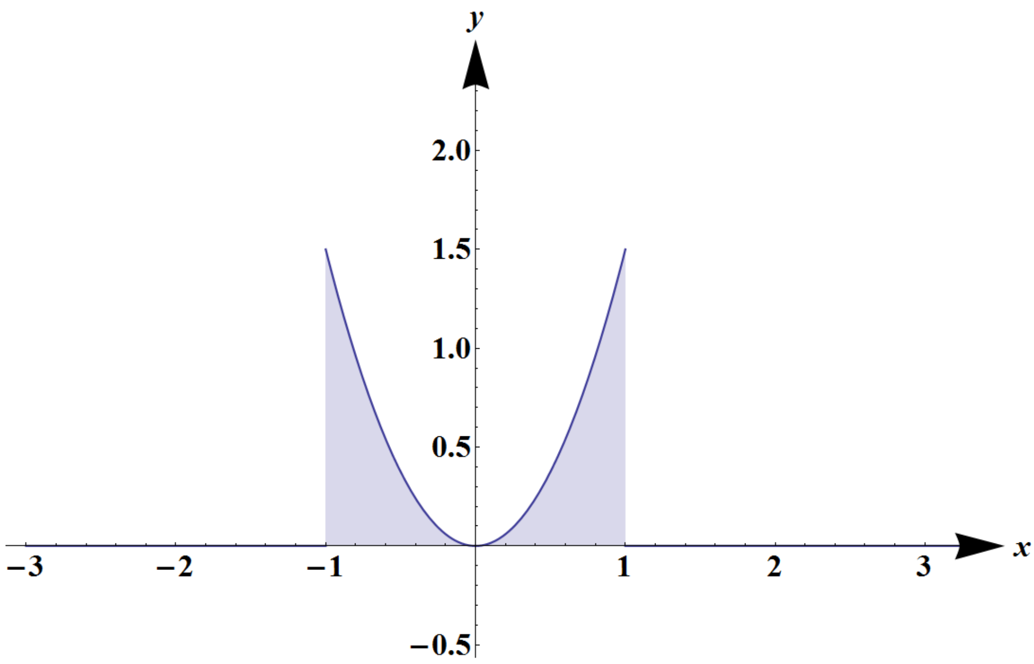
ja saadaan

$$\int_{-1}^{1} ax^2\,dx = \mathop{/}_{-1}^{1} \frac{a}{3}x^3 = \frac{a}{3}1^3 - \frac{a}{3}(-1)^3 = \frac{2a}{3} = 1,$$

josta vakio a voidaan ratkaista. Saadaan $a = \frac{3}{2} > 0$. Funktio

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2, & \text{kun } -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

täyttää satunnaismuuttujan tiheysfunktiolta vaadittavat ehdot, Kuva 1.

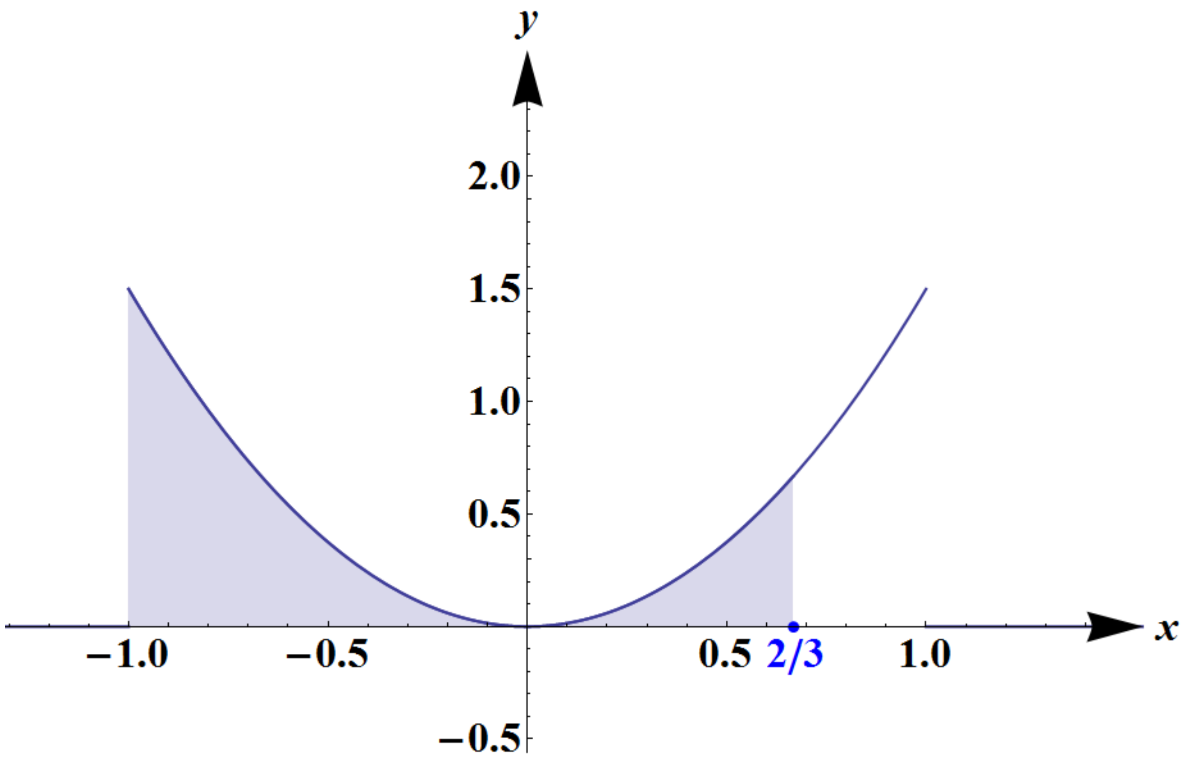


Kuva 1: Funktio $f(x)$ on satunnaismuuttujan $\underline{x}$ tiheysfunktio. Kun $-1 \leq x \leq 1$, niin käyrän $y = \frac{3}{2}x^2$ ja x −akselin väliin jäävä pinta-ala on 1.

b) Todennäköisyys $P\left(\underline{x} < \frac{2}{3}\right)$ vastaa sitä pinta-alaa, mikä on kertynyt $-\infty$:stä kohtaan $x = \frac{2}{3}$ asti. Eli tiheysfunktio f huomioiden käyrän $y = \frac{3}{2}x^2$ ja x −akselin väliin jäävä pinta-ala kun $-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$, katso Kuva 2. Integroimalla ja huomioimalla funktion f määrittelyn saadaan

$$P\left(\underline{x} < \frac{2}{3}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{2}{3}} f(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{-1} 0\,dx}_{=0} + \int_{-1}^{\frac{2}{3}} \frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{3}{2}\cdot \begin{matrix}\frac{2}{3}\\ \leq\\ -1\end{matrix} \frac{1}{3}x^3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3 - (-1)^3\right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[\frac{8}{27} + \frac{27}{27}\right] = \frac{35}{54} \approx 0{,}6\overline{481} \approx 0{,}65.$$



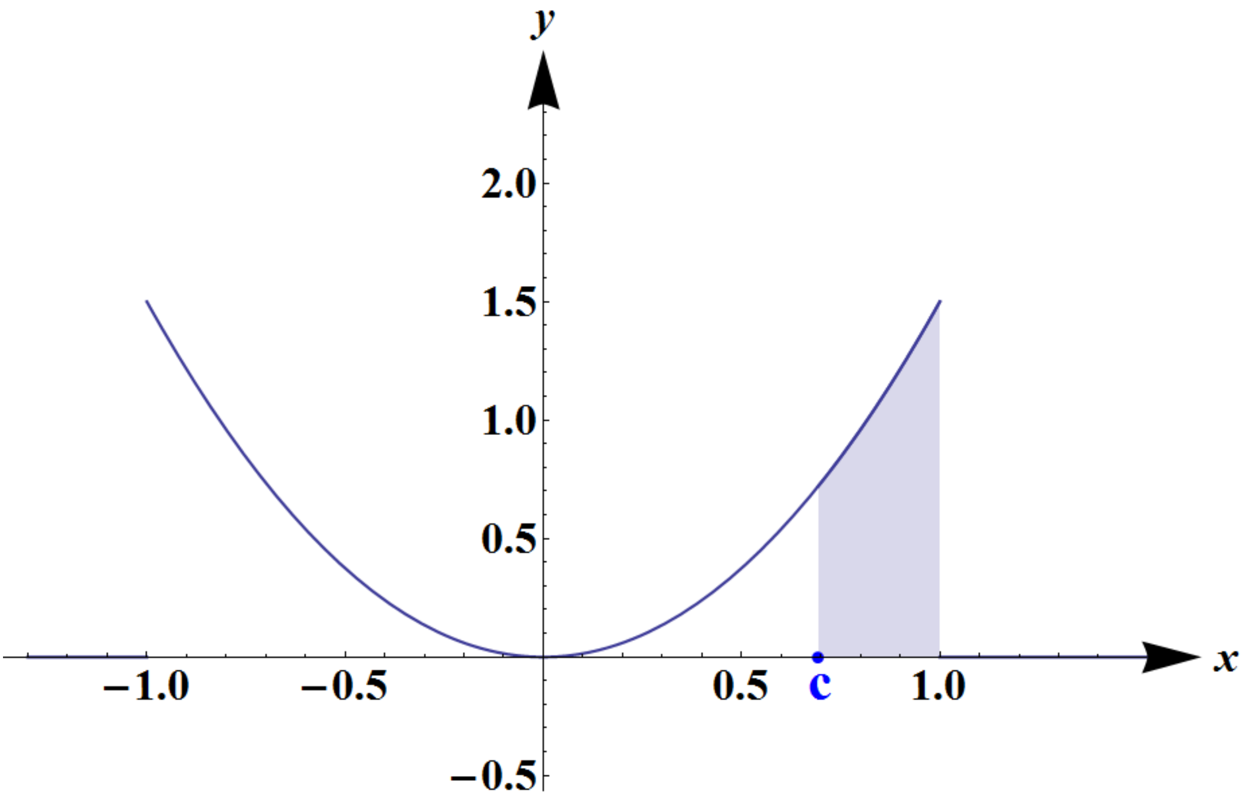
Kuva 2: Todennäköisyys $P\left(\underline{x} < \frac{2}{3}\right)$ vastaa kertynyttä pinta-alaa $\approx \mathbf{0,65}$.

c) Todennäköisyys $P(\underline{x} > c) = \frac{1}{3}$ tiedetään, on etsittävä x −akselilta kohta c, jolle ehto pätee. Nyt on huomioitava, että tarkasteltava todennäköisyys vastaa kohdasta c kohtaan ∞ kertyvää pinta-alaa. Siis, tarkasteltavaksi integraaliksi tulee $\int_c^{\infty} f(x)\,dx$. Ratkaistaan yhtälö $P(\underline{x} > c) = \frac{1}{3}$:

$$P(\underline{x} > c) = \int_c^{\infty} f(x)\,dx = \int_c^{1} \frac{3}{2}x^2\,dx + \underbrace{\int_1^{\infty} 0\,dx}_{=0} = \frac{3}{2}\cdot \begin{matrix}1\\ \leq\\ c\end{matrix} \frac{1}{3}x^3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}[(1)^3 - (c)^3] = \frac{1}{3}$$

ja kohdaksi c tulee täten (katso myös Kuva 3)

$$\frac{1}{2}\cdot[1-c^3]=\frac{1}{3} \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}c^3=\frac{1}{6} \;\Rightarrow\; c=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\approx 0{,}69336\ldots\approx 0{,}69.$$



Kuva 3: Pinta-ala vastaa todennäköisyyttä: $\boldsymbol{P\left(\underline{x} > \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}}$**.**

/12

Tehtävästä 3 alkaen tekniset apuvälineet ovat sallittuja!

3. **a)** Huoneen lattia on neliö, jonka sivujen pituus on 4,0 metriä. Lattialta etsitään pudonnutta helmeä. Olkoon satunnaismuuttuja X helmen etäisyys lähimmästä seinästä. (12p)

i) Määritä kertymäfunktio F todennäköisyyden $P(X \leq x) = F(x)$ avulla ja $P(X \leq 0{,}5)$.

Ohje: Mieti minkäkokoinen on alue kun ollaan x metriä seinästä ja sen osuus koko alueesta (eli geometrinen todennäköisyys). Muuttuja x kuvaa siis etäisyyttä lähimmästä seinästä, eli $P(X \leq x) = F(x) = 0$, kun $x < 0$. Eli yhtään todennäköisyyttä ei ole kertynyt, kun helmen etäisyys seinästä on jotain negatiivista, OK. Vastaavasti, kun muuttuja $x > 2$, niin $P(X > 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2) = 0$, eli $F(2) = 1$. Siis kaikki todennäköisyys on jo kertynyt kohtaan $x = 2$ saakka!

ii) Määritä tiheysfunktio f. Jos F tunnetaan ja $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, niin f saadaan F:stä …imalla.

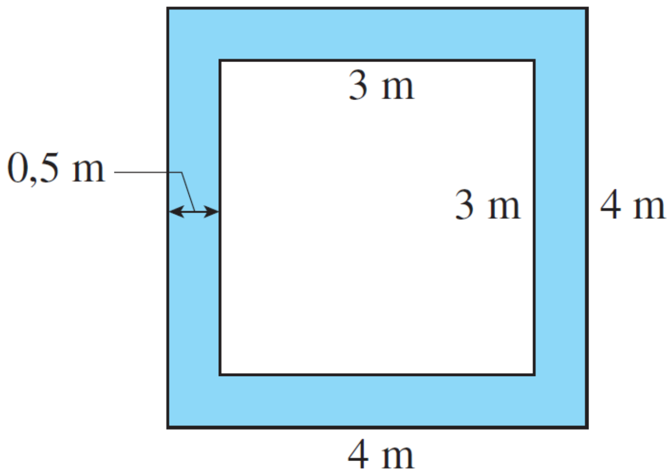
iii) Piirrä F:n ja f:n kuvaajat.

iv) Määritä satunnaismuuttujan X odotusarvo $\mathbb{E}(X)$. ($\mathbb{E}$ = Expected value)

VASTAUS:

i) Aluksi $\boldsymbol{P(X \leq 0,5)}$: Piirretään tilanteesta kuva

→



Helmen etäisyys seinästä on korkeitaan 0,5 metriä, jos helmi on seiniä myötäilevällä 0,5 m levyisellä kaistaleella. Kaistaleen pinta-ala on huoneen pinta-alan ja keskellä jäävän 3,0 metrin levyisen neliön pinta-alan erotus

$$4^2 - 3^2 = 7 \ \ (\mathrm{m}^2)$$

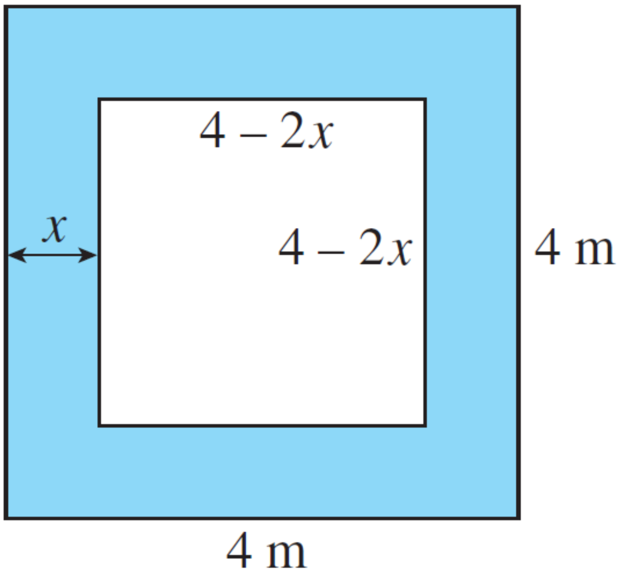
(tai laskee kaistaleen pinta-alan suoraan: $0{,}5 \cdot (4 + 4 + 3 + 3) = 7$.) Näin ollen todennäköisyydelle saadaan

$$P(X \leq 0{,}5) = \frac{7}{16} \approx 0{,}44\,.$$

Kertymäfunktion F arvo kohdassa x on siis todennäköisyys sille, että etäisyys seinästä X on pienempi tai yhtä pieni kuin x, eli $F(x) = P(X \leq x)$. Tilanne huomioiden havaitaan, että aina on oltava $0 \leq X \leq 2$

ja kun $x < 0$, niin tapahtuma $X \leq x$ on mahdoton. Eli $P(X \leq x) = F(x) = 0$, kun $x < 0$. Vastaavasti, kun $x > 2$, niin tapahtuma $X > x$ on mahdoton. Eli $P(X \leq 2) = F(2) = 1$, ja $F(x) = 1$, kun $x > 2$.

Kuvaa hyödyntäen määritetään sellaisen kaistaleen pinta-ala, jonka leveys (eli helmen etäisyys seinästä) on x. Saadaan



$$16 - (4 - 2x)^2 = \ \dots \ = 16x - 4x^2$$

ja todennäköisyys $P(X \leq x)$

$$F(x) = P(X \leq x) = \frac{16x - 4x^2}{16} = 1 - \frac{x^2}{4}$$

Yhdistäen edellä saadut tulokset satunnaismuuttujan X kertymäfunktio on

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 1 - \dfrac{x^2}{4}, & \text{kun } 0 \leq x \leq 0 \\ 1, & \text{kun } 2 < x \end{cases}$$

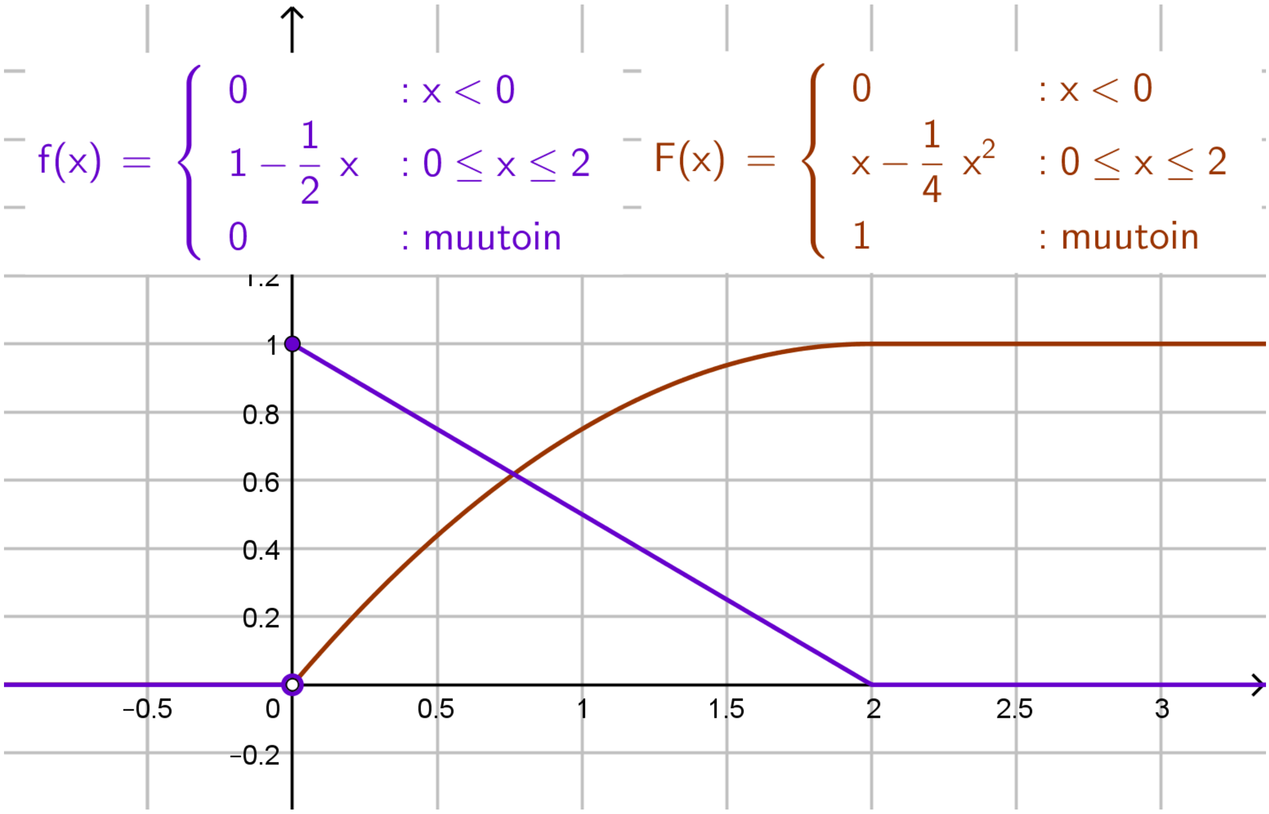
ii) Satunnaismuuttujan X tiheysfunktio f saadaan kertymäfunktiosta derivoimalla. Huomaa, että tiheysfunktiolle $f(x) = F'(x)$ kaikissa niissä kohdissa, joissa F' on derivoituva.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 1 - \dfrac{x}{2}, & \text{kun } 0 < x < 0 \\ 1, & \text{kun } 2 < x \end{cases}$$

Tiheysfunktion f arvoja kohdissa $x = 0$ ja $x = 2$ ei saada suoraan derivoimalla. (Tulisi tutkia F:n toispuoleisia erotusosamäärien raja-arvoja. Näin havaittaisiin, että F on derivoituva kohdassa $x = 2$ ja $F'(2) = 0$, mutta kohdassa $x = 0$ kertymäfunktio F ei ole derivoituva.) Yhtä kaikki koska kyseessä on jatkuvan satunnaismuuttujan jakauma yksittäiset tiheysfunktion arvot (kunhan ovat ei-negatiivisia) eivät vaikuta satunnaismuuttujan todennäköisyyksiin. Näin ollen $f(0)$ ja $f(2)$ voidaan määrittää lausekkeella $1 - \frac{x}{2}$. Siis

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < 0 \\ 1 - \dfrac{x}{2}, & \text{kun } 0 \leq x \leq 0 \\ 1, & \text{kun } 2 < x \end{cases}$$

iii) Kuvaajat



iv) Odotusarvolle $\mathbb{E}(X)$ saadaan

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx = \; ... = \int_0^2 x \cdot \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \; ... \; = 2 - \frac{4}{3} \approx 0{,}67\,.$$

/12

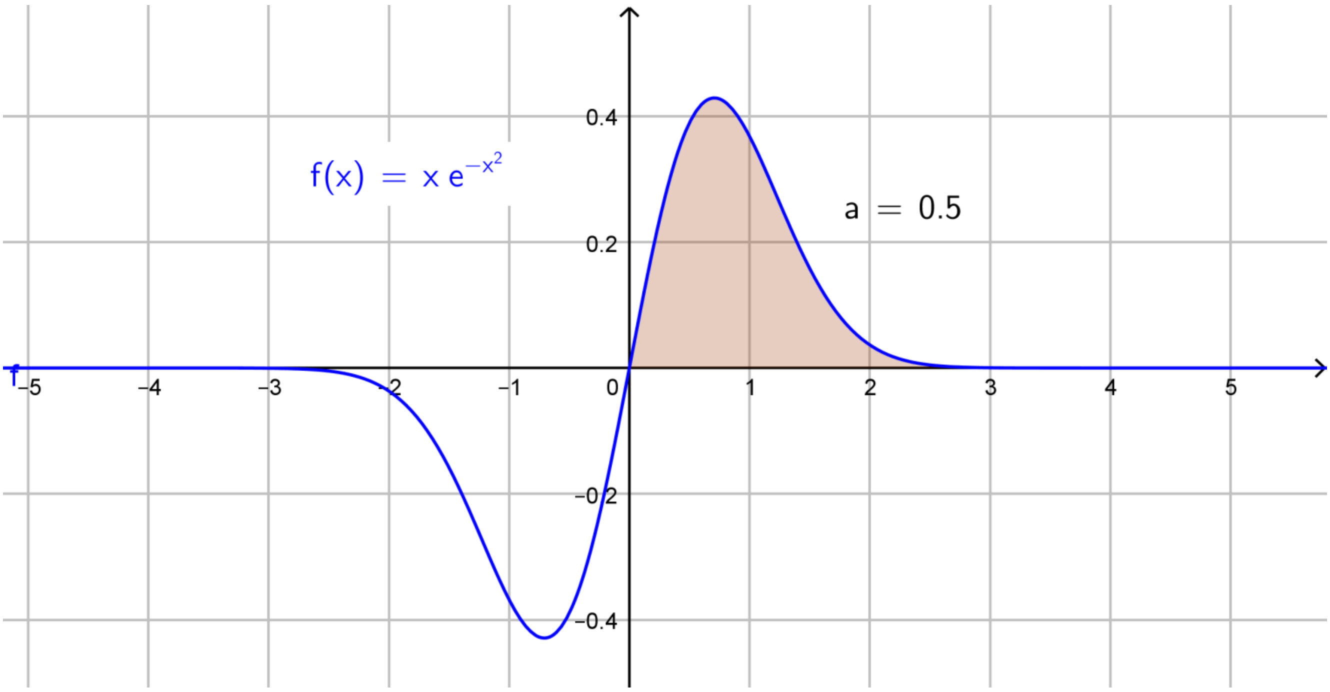
4. a) Määritä funktion $f(x) = xe^{-x^2}$ kuvaajan ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala. Määritä tämän aleen pyörähtäessä x-akselin ympäri syntyvän kappaleen tilavuus. (6p)

VASTAUS:

Funktio f saa positiivisia arvoja, kun $x > 0$ ja negatiivisia, kun $x > 0$. Tekijä $e^{-x^2} > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Lisäksi funktio f on pariton, joten riittää laskea integraali $\int_0^\infty f(x)\,dx$ ja kertoa lopuksi kahdella → katso kuva.

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty} \int_0^a -\frac{1}{2}\cdot(-2)xe^{-x^2}\,dx = \lim_{a\to\infty} \mathop{/}_{0}^{a} -\frac{1}{2}e^{-x^2} = \lim_{a\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-a^2} + \frac{1}{2}e^{-0^2}\right) = \frac{1}{2}$$

Näin ollen pinta-alan arvo on 1.



Pyörähdyskappaletta varten hyödynnetään symmetrisyyttä, saadaan

$$V = 2\cdot\int_0^\infty \pi\cdot\left(xe^{-x^2}\right)^2 dx = \lim_{a\to\infty} 2\pi\cdot\int_0^a x^2e^{-2x^2}\,dx = \ \dots\ = 0{,}984\,350\ldots \approx 0{,}98.$$

b) Funktio (6p)

$$f: f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{kun } x \le -\ln 2 \\ \dfrac{1}{10}, & \text{kun } -\ln 2 < x \le \ln 2 \\ 0.722741127776\cdot e^{-x}, & \text{kun } \ln 2 < x \end{cases}$$

on erään satunnaismuuttujan X tiheysfunktio. Määritä kertymäfunktio F ja laske $P(X > 0)$. Määritä laskimella odotusarvo $\mathbb{E}(X)$ ja keskihajonta $\mathbb{D}(X)$ varianssin $\mathbb{D}^2(X)$ kautta.

VASTAUS:

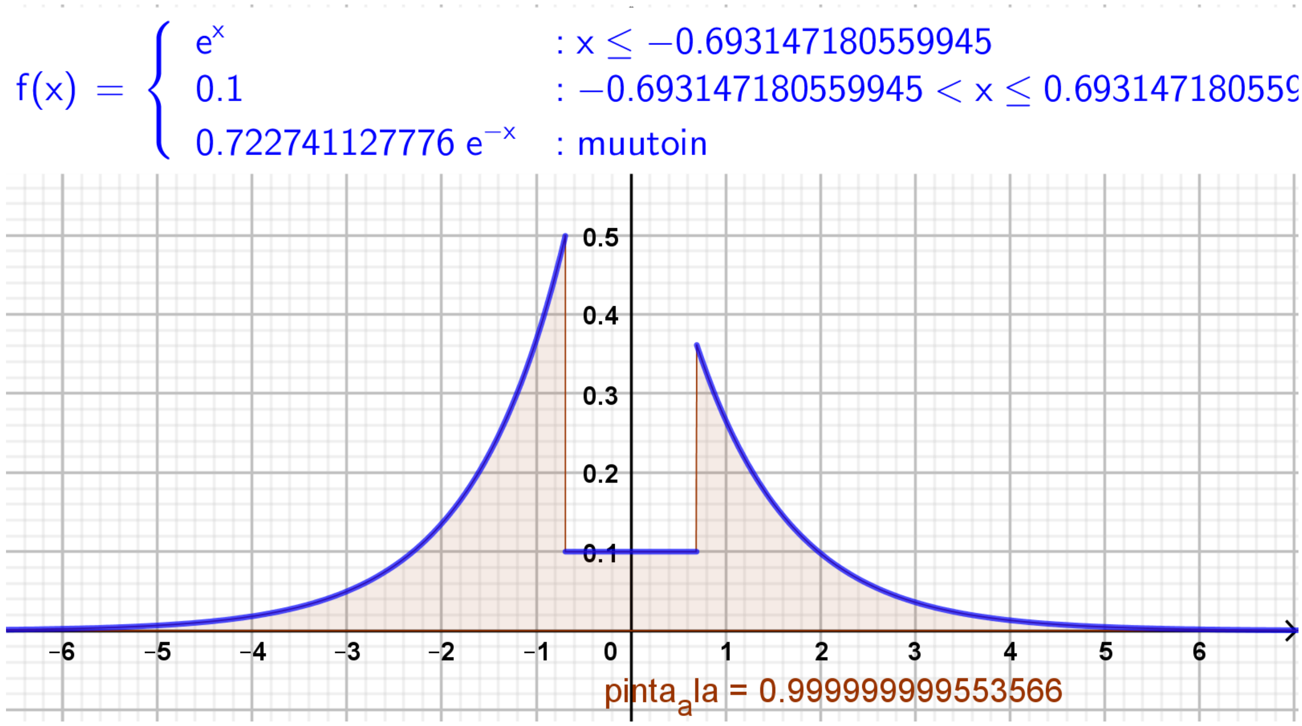
Kertymäfunktiolle saadaan:

$$F: F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^t\,dt, & \text{kun } x \leq -\ln 2 \\ \displaystyle F(-\ln 2) + \int_{-\ln 2}^{x} \frac{1}{10}\,dt, & \text{kun } -\ln 2 < x \leq \ln 2 \\ \displaystyle F(\ln 2) + \int_{\ln 2}^{x} 0{,}722741127776 \cdot e^{-t}\,dt, & \text{kun } \ln 2 < x \end{cases}$$

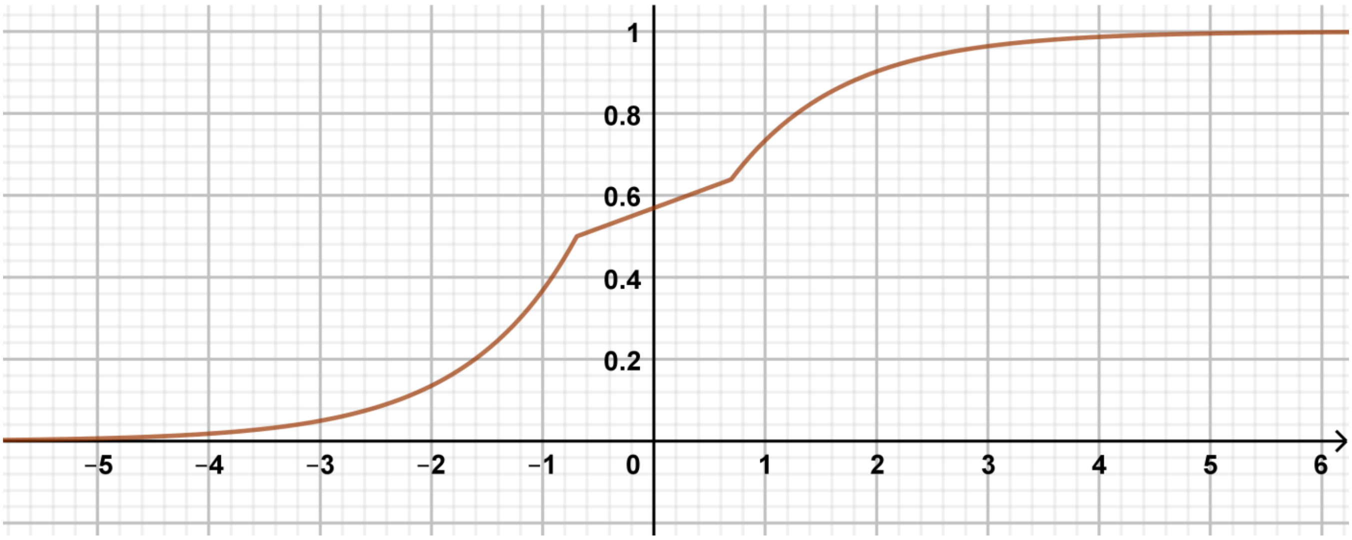
$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{a\to-\infty} \int_a^x e^t\,dt = \lim_{a\to-\infty} \mathop{/}_{a}^{x} e^t = \lim_{a\to-\infty} (e^x - e^a) = e^x, & \text{kun } x \leq -\ln 2 \\ \displaystyle F(-\ln 2) + \mathop{/}_{-\ln 2}^{x} \frac{1}{10}t = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{10}\cdot\ln 2\right), & \text{kun } -\ln 2 < x \leq \ln 2 \\ \displaystyle F(\ln 2) + \mathop{/}_{\ln 2}^{x} -0{,}722\ldots \cdot e^{-t} = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{5} + \left(-0{,}722\ldots \cdot e^{-x} + 0{,}722\ldots \cdot \frac{1}{2}\right), & \text{kun } \ln 2 < x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} e^x, & \text{kun } x \leq -\ln 2 \\ \displaystyle\frac{1}{10}x + \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{10}, & \text{kun } -\ln 2 < x \leq \ln 2 \\ \displaystyle -0{,}722\ldots \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{5} + \frac{0{,}722\ldots}{2}, & \text{kun } \ln 2 < x \end{cases}$$

Kuvaajat:



$$F(x) = \begin{cases} e^{x} & : x \leq -0.693147180559945 \\ \frac{1}{10}x + \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{10} & : -0.693147180559945 < x \leq 0.69314718055 \\ -0.722741127776\, e^{-x} + \frac{1}{2} + \frac{\ln(2)}{5} + \frac{0.722741127776}{2} & : \text{muutoin} \end{cases}$$



Näin ollen todennäköisyydelle P saadaan

$$P(X > 0) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - F(0) = 1 - \left(\frac{1}{10} \cdot 0 + \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{10}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{10} = 0{,}430\,685\,\ldots$$

Odotusarvolle $\mathbb{E}(X)$ saadaan

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,dx = \ \ldots = \ -0{,}846\,\ldots + 0 + 0{,}611\,\ldots = -0{,}234\,720\,038\,895\,\ldots\,.$$

$$\int_{-\infty}^{-\ln(2)} \left(x \cdot e^{x}\right) dx \qquad -0.84657359028$$

$$\int_{-\ln(2)}^{\ln(2)} \left(x \cdot 0.1\right) dx \qquad 0.$$

$$\int_{\ln(2)}^{\infty} \left(x \cdot 0.722741127776 \cdot e^{-x}\right) dx \qquad 0.611853551384$$

Keskihajonnalle $\mathbb{D}(X)$ saadaan

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \mathbb{E}(X)\right)^2 \cdot f(x)\,dx} = \ \ldots = \sqrt{1{,}563\ldots + 0{,}029\ldots + 1{,}704\ldots} = 1{,}815\,987\,476\ldots.$$