

Nimi:

VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!

MAOL/LIITE/taulukot.com JA LASKIN ON SALLITTU ELLEI TOISIN MAINITTU!

TARKISTA TEHTÄVÄT TESTIN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

---

**Ratkaise tehtävät 1 ja 2 ilman teknisiä apuvälineitä!**

1. a) Onko väite A–D tosi vai epätosi? (2p)
- A Jos lukujono on kasvava, sen raja-arvo on aina  $\infty$ . tosi/epätosi
- B Sarjan summa tarkoittaa sen yleisen termin raja-arvoa. tosi/epätosi
- C Suppenevan sarjan yleisellä termillä on aina raja-arvo nolla. tosi/epätosi
- D Jos lukujonolle  $(a_n)$  on voimassa  $a_{n+1} - a_n = 0$ , niin lukujono on suppeneva. tosi/epätosi
- b) Onko väite A–D tosi vai epätosi? (2p)
- A Jos geometrinen lukujono suppenee, niin se on vähenevä. tosi/epätosi
- B Jos geometrinen lukujono on vähenevä, niin se suppenee. tosi/epätosi
- C Jos geometrisessa lukujonossa on jotkin kaksi eri merkkistä jäsentä,  
niin jonon kaksi peräkkäistä jäsentä ovat aina eri merkkiset. tosi/epätosi
- D Geometrisen lukujonon kahden peräkkäisen termin erotus ei voi olla 0. tosi/epätosi
- c) Tutki lukujonosta  $(b_n)$ ,  $b_n = \frac{1}{2^n}$ , muodostettua sarjaa  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . (8p)
- i) Suppeneeko sarja? Jos suppenee, niin määritä sarjan summa. Jos ei suppene, niin määritä se indeksi  $k$ , josta lähtien osasummalle pätee arvio  $S_k \geq 10$ .
- ii) Suppeneeko teleskooppisarja  $\sum_{n=1}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$ ? Ohje: Kirjoita muutamia ensimmäisiä termejä ja viimeisiä termejä näkyviin ja tee johtopäätös.

2. a) Määritä raja-arvot perustellen

i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n-1}{3n+2}$

ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n}{n+3}}$

iii)  $\lim_{n \rightarrow 0} \left( n \cdot \sin \frac{1}{n} \right)$

(6p)

jatka toiselle puolelle

b) Kirjoita sarja  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  muodossa

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

(3p)

c) Osoita, että lukujono  $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$  on vähenevä.

(3p)

**Tehtävästä 3 alkaen tekniset apuvälineet ovat sallittuja!**

3. a) Ratkaise yhtälö perustellen. (Tarkista toki laskimella!)

(4p)

$$x + x^3 + x^5 + \dots = \frac{1}{2}$$

b) Osoita, että lukujono

(4p)

$$(a_n): a_n = \ln \frac{n}{n+1}$$

on monotoninen. Onko lukujonon kasvava vai vähenevä? Määritä se lyhyin mahdollinen väli  $[a, b]$ , joka sisältää kaikki lukujonon  $(a_n)$  jäsenet.

jatka toiselle puolelle

c) Määritä lukujonon

(4p)

$$b_n = \frac{50 - n}{n^4}$$

pienin jäsen perustellen.

4. a) Tarkastellaan lukujonoa

$$(a_n) = \left( \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{7}{4}, \frac{10}{5}, \frac{13}{6}, \dots \right).$$

Määritä lukujonon yleinen jäsen eli  $n$ :s jäsen ja lukujonon raja-arvo. Mistä indeksistä  $n$  alkaen lukujonon jäsenen etäisyys raja-arvosta  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  on pienempi kuin **i)** 0,001 ja **ii)** annettu positiiviluku  $\varepsilon > 0$ .

Perustele!

(5p)

b) Mikä on funktion

$$f: f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{5}{6}\right)^n \sin^n x$$

määrittelyjoukko? Määritä lisäksi funktion suurin ja pienin arvo sekä kohdat, joissa nämä saadaan. Ohje:

Tutki ensin sarjan suppenevuutta muokkaamalla summauslauseketta.

(7p)

<b>/12</b>
------------

<b>/48</b>
------------