Matematiikan TESTI 2, Maa13 – Diff.-ja int.-laskennan jatkokurssi – RATKAISUT **Sievin lukio**
III jakso/2018 **Nimi:**
VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!
MAOL/LIITE/taulukot.com JA LASKIN ON SALLITTU ELLEI TOISIN MAINITTU!
TARKISTA TEHTÄVÄT TESTIN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

Ratkaise tehtävät 1 ja 2 ilman teknisiä apuvälineitä!

1. a) Onko väite A–D tosi vai epätosi? **(2p)**

A Jos lukujono on kasvava, sen raja-arvo on aina ∞. **tosi/epätosi**

B Sarjan summa tarkoittaa sen yleisen termin raja-arvoa. **tosi/epätosi**

C Suppenevan sarjan yleisellä termillä on aina raja-arvo nolla. **tosi/epätosi**

D Jos lukujonolle (a_n) on voimassa $a_{n+1} - a_n = 0$, niin lukujono on suppeneva. **tosi/epätosi**

VASTAUKSET: A–epätosi, B–epätosi, C–tosi, C–tosi

b) Onko väite A–D tosi vai epätosi? **(2p)**

A Jos geometrinen lukujono suppenee, niin se on vähenevä. **tosi/epätosi**

B Jos geometrinen lukujono on vähenevä, niin se suppenee. **tosi/epätosi**

C Jos geometrisessa lukujonossa on jotkin kaksi eri merkkistä jäsentä,

niin jonon kaksi peräkkäistä jäsentä ovat aina eri merkkiset. **tosi/epätosi**

D Geometrisen lukujonon kahden peräkkäisen termin erotus ei voi olla 0. **tosi/epätosi**

VASTAUKSET: A–epätosi, B–epätosi, C–tosi, C–epätosi

c) Tutki lukujonosta (b_n), $b_n = \frac{1}{2^n}$, muodostettua sarjaa $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. **(8p)**

i) Suppeneeko sarja? Jos suppenee, niin määritä sarjan summa. Jos ei suppene, niin määritä se indeksi k, josta lähtien osasummalle pätee arvio $S_k \geq 10$.

ii) Suppeneeko teleskooppisarja $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$? Ohje: Kirjoita muutamia ensimmäisiä termejä ja viimeisiä termejä näkyviin ja tee johtopäätös.

VASTAUS:

i) Lukujonon (b_n) ensimmäiset termit ovat: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, josta voidaan havaita, että kyseessä on geometrinen jono, suhdeluvuksi saadaan

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2^n}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Erityisesti suhdeluku q ei riipu indeksistä n. Siis $(b_n) = b_1 \cdot q^{n-1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$. Lisäksi koska suhdeluvulle pätee $-1 < q \leq 1$, niin lukujono (b_n) suppenee. Tällöin pätee $b_n \to 0$ kun $n \to \infty$. Merkitään lukujonon (b_n) raja-arvoa kirjaimella b, $b = 0$. Koska suhdeluvulle q pätee vielä tarkemmin, $|q| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$, niin myös geometrinen sarja suppenee ja sarjan summaksi tulee

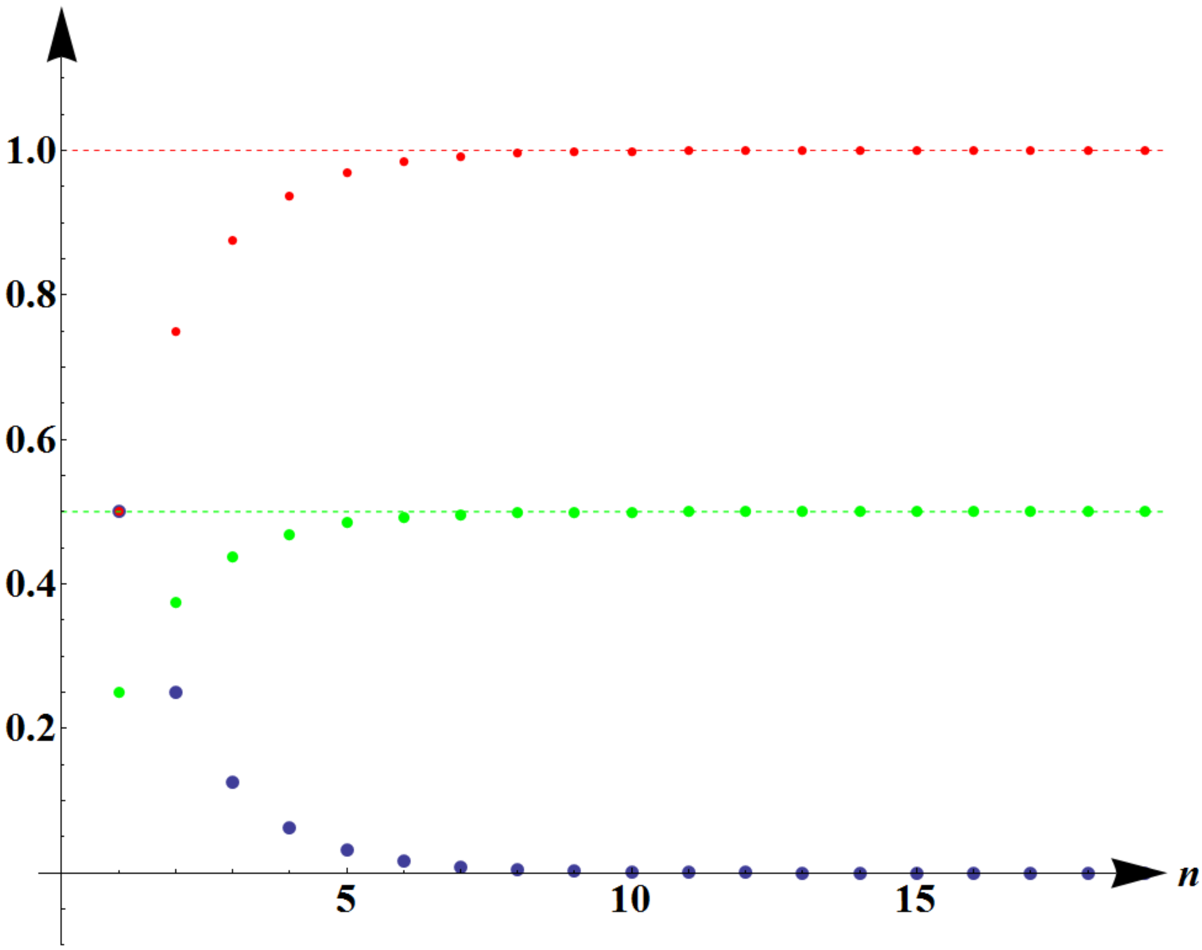
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{b_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Sarja suppenee ja sarjan summa on 1.

ii) *TULOS: Lukujonon (b_n) teleskooppisarja $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ suppenee, jos ja vain jos tämä lukujono suppenee. Jos $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, niin $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1}) = b_1 - b$.* Koska lukujono (b_n) suppeni kohti nollaa, niin voidaan käyttää tulosta ja saadaan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{=b_1} - \underbrace{0}_{=b} = \frac{1}{2}.$$

Teleskooppisarja suppenee ja teleskooppisarjan summa on $\frac{1}{2}$. Lukujono (b_n), lukujonoa vastaava sarja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ja teleskooppisarja $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ on hahmoteltu alla olevassa kuvassa, Kuva 1.



Kuva 1: Lukujono (b_n) on merkittynä sinisellä (alimmat pisteet), lukujonoa vastaava sarja $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ punaisella (ylimmät pisteet) ja teleskooppisarja $\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - b_{n+1})$ vihreällä (keskimmäiset pisteet).

/12

2. a) Määritä raja-arvot perustellen **(6p)**

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+2}$ **ii)** $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n}{n+3}}$ **iii)** $\lim_{n\to 0}\left(n \cdot \sin\frac{1}{n}\right)$

VASTAUS:

i)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{5n-1}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(5-\frac{1}{n}\right)}{n\left(3+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{5-\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{5}{3}$$

ii)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2n}{n+3}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{2n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{3}{n}}} = \sqrt{\frac{2}{1}} = \sqrt{2}$$

iii)

$$\lim_{n\to\infty}\left(n \cdot \sin\tfrac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) \overset{m=\frac{1}{n}}{\triangleq} \lim_{m\to 0}\left(\frac{\sin m}{m}\right) = 1$$

b) Kirjoita sarja $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \ldots$ **muodossa** **(3p)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

VASTAUS: Etumerkkien vuorotteluvuus saadaan $(-1)^{n-1}$ ja nimittäjän kasvu suoraan indeksin n arvo. Siis

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$$

c) Osoita, että lukujono $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ **on vähenevä.** **(3p)**

VASTAUS: Tutkitaan kahden peräkkäisen termin välistä osamäärää koska sekä osoittaja ja nimittäjä ovat positiivisia kaikilla n.

$$a_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!\,n!}{(2n)!} \qquad a_{n+1} = \frac{\left((n+1)!\right)^2}{\left(2(n+1)\right)!} = \frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}$$

Siis (molemmista termeistä kertomat on jo sievennetty pois)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!\,(n+1)!}{(2n)! \cdot (2n+1) \cdot (2n+2)}}{\frac{n!\,n!}{(2n)!}} = \frac{\frac{n! \cdot (n+1) \cdot n! \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+2)}}{\frac{n!\,n!}{1}} = \frac{(n+1) \cdot (n+1)}{(2n+1) \cdot (2n+2)} < 1$$

kaikilla $n \in \mathbb{Z}_+$.

/12

Tehtävästä 3 alkaen tekniset apuvälineet ovat sallittuja!

3. a) Ratkaise yhtälö perustellen. (Tarkista toki laskimella!) **(4p)**

$$\boldsymbol{x + x^3 + x^5 + \ \ldots = \frac{1}{2}}$$

VASTAUS: Yhtälön vasen puoli on geometrinen summa, $a_1 = x$, $q = x^2$, kun pätee $-1 < q < 1$, eli kun $-1 < x^2 < 1$. Neliö ei voi olla koskaan negatiivista eli ehto on $0 \leq x^2 < 1$. Hylätään yhtäsuuruus nollan kanssa koska tällöin myös $x = 0$ ja yhtälöllä ei ole ratkaisua. (Eli ehdosta $x^2 = 0$ seuraa $x = 0$, MAA11 kurssilta.) Siis, $0 < x^2 < 1$ ja näin ollen lopulta ehto x:lle on $0 < x < 1$.

Saadaan

$$x + x^3 + x^5 + \ \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n-1} \overset{\substack{\text{geom.sarja} \\ a_1=x, q=x^2}}{\cong} \frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2x = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Näistä ratkaisuista vain $x = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}4142$ hyväksytään.

b) Osoita, että lukujono **(4p)**

$$\boldsymbol{(a_n):\ a_n = \ln \frac{n}{n+1}}$$

on monotoninen. Onko lukujonon kasvava vai vähenevä? Määritä se lyhyin mahdollinen väli $[a, b]$, joka sisältää kaikki lukujonon (a_n) jäsenet.

VASTAUS: Tarkastellaan funktiota f: $f(x) = \ln \frac{x}{x+1}$, joka on jva & dva, kun $x > 0$. Koska logaritmifunktiolle f saadaan

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1 \cdot (x+1) - x \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x \cdot (x+1)} = \frac{1}{x^2 + x} > 0$$

kaikilla $x > 0$. Näin ollen lukujono (a_n) on monotoninen, eli (aidosti) kasvava.

Edelleen koska

$$a_1 = \ln \frac{1}{1+1} = -\ln 2, \qquad \lim_{n \to \infty} \ln \frac{n}{n+1} = \ln 1 = 0,$$

niin monotonisuuden nojalla lukujonon arvot ovat välillä $[-\ln 2, 0]$.

c) Määritä lukujonon **(4p)**

$$\boldsymbol{b_n = \frac{50 - n}{n^4}}$$

pienin jäsen perustellen.

VASTAUS: Lukujonoa vastaava (kaikilla $x > 0$ jatkuva) funktio

$$f\colon\ f(x) = \frac{50 - x}{x^4}, \qquad x \neq 0$$

on siis määritelty kaikilla nollasta poikkevilla muuttujan arvoilla. Koska alkuperäinen tehtävä on tutkia lukujonon arvoja, niin voidaan rajoittua muuttujan arvoihin $x > 0$ ja vielä tarkemmin $x \geq 1$.

Tarkastellaan funktion f käyttäytymistä.

Derivointi:

$$Df = D\left(\frac{50 - x}{x^4}\right) = \frac{-1 \cdot x^4 - (50 - x) \cdot 4x^3}{(x^4)^2} = \frac{3 \cdot x^4 - 200x^3}{x^8}$$

Derivaatan nollakohdat: Milloin osoittaja on nolla (nimittäjä on aina positiivista, kun $x > 0$)?

$$3 \cdot x^4 - 200x^3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3(3x - 200) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0 \ \vee \ x = \frac{200}{3} \approx 67.$$

Laskemalla muutama arvo derivaatan nollakohdan molemmilta puolilta

$$f'(66) = \frac{3 \cdot 66^4 - 200 \cdot 66^3}{66^8} \approx -1{,}597 \ldots \cdot 10^{-9},$$

$$f'(67) = \frac{3 \cdot 67^4 - 200 \cdot 67^3}{67^8} \approx 7{,}406 \ldots \cdot 10^{-10}$$

havaitaan, että kyseessä on minimikohta, sillä f on jatkuva.

Funktion kulkukaavio, riittää tutkia kun $x > 0$:

	0		$\approx 66{,}6$	
f	‖	↘		↗
Df	‖	$-$		$+$

Eli kun $x > 0$, niin funktio f saa pienimmän arvon muuttujan kohdalla $x \approx 66{,}6$.

Tarkastellaan siksi lukujonon (a_n) termien arvoja indekseillä $n = 65, 66, 67, 68$ ja saadaan:

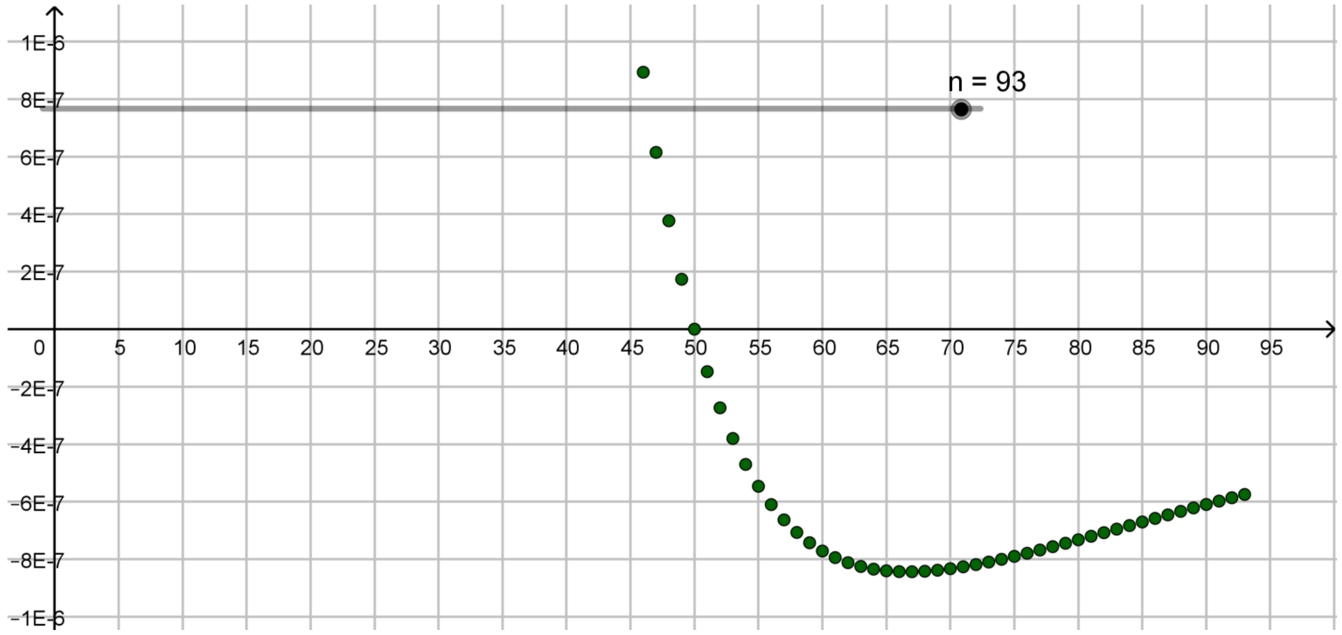
$$n = 65\colon\ a_{65} = \frac{50 - 65}{65^4} = -8{,}403 \ldots \cdot 10^{-7}$$

$$n = 66\colon\ a_{66} = \frac{50 - 66}{66^4} = -8{,}432 \ldots \cdot 10^{-7}$$

$$n = 67\colon\ a_{67} = \frac{50 - 67}{67^4} = -8{,}436 \ldots \cdot 10^{-7}$$

$$n = 68\colon\ a_{68} = \frac{50 - 68}{65^4} = -8{,}418 \ldots \cdot 10^{-7}$$

Lukujonon (a_n) pienin jäsen on siis $-8{,}436 \ldots \cdot 10^{-7}$ ja se saavutetaan indeksien arvolla $n = 67$. Katso myös kuva alla.



/12

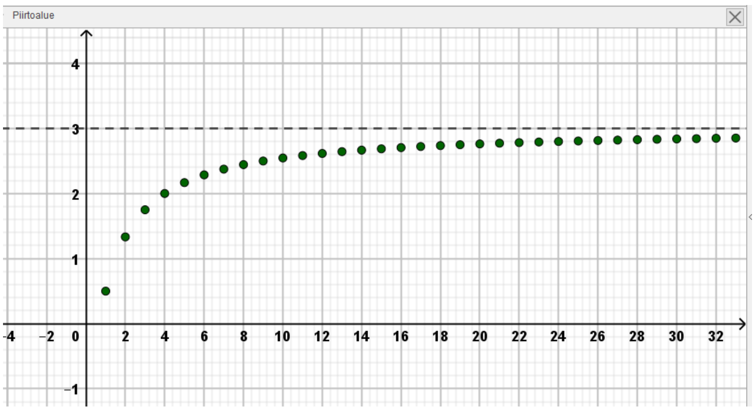
4. a) Tarkastellaan lukujonoa

$$(\boldsymbol{a_n}) = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}, \frac{\mathbf{7}}{\mathbf{4}}, \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{5}}, \frac{\mathbf{13}}{\mathbf{6}}, \ldots\right).$$

Määritä lukujonon yleinen jäsen eli $\boldsymbol{n}$:s jäsen ja lukujonon raja-arvo. Mistä indeksistä $\boldsymbol{n}$ alkaen lukujonon jäsenen etäisyys raja-arvosta $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{a_n}$ on pienempi kuin i) $\mathbf{0{,}001}$ ja ii) annettu positiivi-luku $\boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0}$. Perustele! **(5p)**

VASTAUS: Lukujonossa osoittaja kasvaa aina kolmella ja nimittäjä kasvaa yhdellä, joten lukujonon yleinen jäsen on $a_n = \frac{-2+3n}{n+1}$ ja lukujonon raja-arvo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{-2+3n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \left(\frac{-2}{n} + 3\right)}{n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{-2}{n} + 3}{1 + \frac{1}{n}} = 3\,.$$



i) Eli milloin epäyhtälö $\left|a_n - \lim_{n\to\infty} a_n\right| < 0{,}001$ on voimassa?

$$\left|a_n - \lim_{n\to\infty} a_n\right| < 0{,}001$$

$$\left|\frac{-2+3n}{n+1} - 3\right| < \frac{1}{1000} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{-2+3n-3n-3}{n+1}\right| < \frac{1}{1000} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{-5}{n+1}\right| < \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow \quad 5000 < n+1 \quad \Rightarrow \quad 4999 < n\,.$$

Vastaus: Indeksin n arvosta 5000 alkaen.

ii) Eli milloin epäyhtälö $\left|a_n - \lim_{n\to\infty} a_n\right| < \varepsilon$ on voimassa?

$$\left|a_n - \lim_{n\to\infty} a_n\right| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{-2+3n}{n+1} - 3\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{-2+3n-3n-3}{n+1}\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{-5}{n+1}\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad 5 < \varepsilon\cdot(n+1) \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{\varepsilon} < n+1 \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{\varepsilon} - 1 < n\,.$$

Vastaus: Indeksin n arvosta $n_\varepsilon = \left\lceil\frac{5-\varepsilon}{\varepsilon}\right\rceil$ alkaen, missä ns. kattofunktio $\lceil x\rceil \in \mathbb{Z}_+$ tarkoittaa lukua x suurempaa lähintä kokonaislukua.

b) Mikä on funktion

$$\boldsymbol{f: f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{6}\right)^n \sin^n x}$$

määrittelyjoukko? Määritä lisäksi funktion suurin ja pienin arvo sekä kohdat, joissa nämä saadaan. Ohje: Tutki ensin sarjan suppenevuutta muokkaamalla summauslauseketta. (7p)

VASTAUS: Summattava termi $\left(-\frac{5}{6}\right)^n \sin^n x = \left(-\frac{5}{6}\cdot\sin x\right)^n$, joten funktion f lauseke on geometrisen sarjan avulla saatu, $a_1 = q = -\frac{5}{6}\cdot\sin x$. Edelleen koska $-1 < \sin x < 1$, niin myös $-1 < -\frac{5}{6}\cdot\sin x < 1$, eli sarja suppenee kaikilla x:n arvoilla ja funktio f on hyvin määritelty kaikilla x.

Näin ollen

$$f(x) = 1 + \left(-\frac{5}{6}\cdot\sin x\right)^1 + \left(-\frac{5}{6}\cdot\sin x\right)^2 + \ \ldots = \frac{1}{1-\left(-\frac{5}{6}\cdot\sin x\right)} = \frac{1}{1+\frac{5}{6}\cdot\sin x} = \frac{6}{6+5\sin x}.$$

Nimittäjä on aina positiivista koska $-1 < \sin x < 1$, samoin $6 > 0$. Tästä seuraa että funktion suurin arvo saadaan, kun nimittäjä on pienin ja funktio saa pienimän arvonsa, kun nimittäjä on suurin.

Koska nimittäjälle $1 < 6 + 5\sin x < 11$ ja arvo 1, kun $\sin x = -1$, eli kun $x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$. Sekä arvo 11, kun $\sin x = 1$, eli kun $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$

→ Funktion f suurin arvo on siis $\frac{6}{1} = 6$ ja se saadaan x:n arvoilla $x = -\frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$.

→ Funktion f pienin arvo on siis $\frac{6}{11}$ ja se saadaan x:n arvoilla $x = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi$.

/12

/48