

VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!

MAOL/LIITE/taulukot.com JA LASKIN ON SALLITTU ELLEI TOISIN MAINITTU!

TARKISTA TEHTÄVÄT TESTIN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

**Ratkaise tehtävät 1 ja 2 ilman teknisiä apuvälineitä!**

1. a) Yhdistä laskuun A–D sopiva vastaus I–IV. (Sama vastaus voi tulla useasti.) (2p)

A  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$  I 1

B  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$  II 0

C  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{(x - 1)^2}$  III kasvaa rajatta

D  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x - 1}$  IV ei raja-arvoa eikä epäoleellista raja-arvoa

b) Onko väite A–D tosi vai epätosi? (2p)

A Jos funktio  $f$  on kaikkialla derivoituva, niin  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , missä  $a \in \mathbb{R}$ . tosi/epätosi

B Jos  $f'(2) = 4$ , niin  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ . tosi/epätosi

C Jos  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 0$ , niin  $f'(3) = 0$ . tosi/epätosi

D Jos  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$  ja  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 3$ , niin  $f(2) = 5$ . tosi/epätosi

c) Olkoon  $f$  funktio, jolla on seuraavat ominaisuudet:  $f(x + y) = f(x)f(y)$  kaikilla reaaliluvuilla  $x$  ja  $y$ ,  $f(0) = 1$  ja  $f$  on derivoituva muuttujan arvolla 0. Osoita erotusosamäärää käyttäen, että  $f$  on derivoituva kaikkialla ja että  $f'(x) = f'(0)f(x)$ . (8p)

jatka toiselle puolelle

**/12**

2. a) Voiko kahden epäjatkuvan funktion summafunktio olla jatkuva? Entä voiko epäjatkuvan ja jatkuvan funktion summafunktio olla jatkuva? Perustelee, anna esimerkki jos voi. Älä jää jumiin tähän tehtävään! (4p)

b) Suljetulla välillä  $[0,1]$  jatkuvan ja avoimella välillä  $]0,1[$  derivoituvan funktion  $f$  derivaatalle pätee  $f'(x) \geq 2$  jokaiselle  $x \in ]0,1[$ . Todista, että

$$f(x) \geq f(0) + 2x \quad \text{kaikilla } x \in [0,1].$$

Ohje: Osoita aluksi, että väite pätee kun  $x = 0$ . Todista tämän jälkeen väliarvolauseen avulla, että väite pätee kun  $0 < x \leq 1$ . (6p)

c) Laske raja-arvo  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - x}$ . (2p)

**Tehtävästä 3 alkaen tekniset apuvälineet ovat sallittuja!**

3. a) Millä vakion  $a$  arvoilla funktio

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & \text{kun } x \leq a \\ x^3 - 2x, & \text{kun } x > a \end{cases}$$

on jatkuva kaikkialla? Piirrä kaikista tilanteista kuva Geogebrailla ja liitä kuva vastaukseesi.

(8p)

**b)** Määritä ensin laskimella ja sitten laskusääntöjä käyttämällä raja-arvo

(4p)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x^2 + x}).$$

Piirrä tilanteesta kuva Geogebraalla sisältäen tarvittavat asymptootit mikäli niitä on.

4. a) Mitä voidaan sanoa funktion

$$f: f(x) = \frac{|x| - 1}{x - 1}, \quad x \neq 1$$

jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta kohdassa  $x = 0$ ? Perustele!

(5p)

jatka toiselle puolelle

**b)** Funktiosta  $f$  tiedetään, että se on määritelty jokaisella reaaliluvulla ja että  $2 \leq f(x) \leq 5$  kaikilla  $x$ .

Mitä voidaan sanoa funktion  $g$  jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta kohdassa  $x = 0$ , kun

**i)**  $g(x) = x \cdot f(x)$

**ii)**  $g(x) = x^2 \cdot f(x)$

(7p)

<b>/12</b>
------------

<b>/48</b>
------------