Nimi:

VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!
MAOL/LIITE/taulukot.com JA LASKIN ON SALLITTU ELLEI TOISIN MAINITTU!
TARKISTA TEHTÄVÄT TESTIN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

Ratkaise tehtävät 1 ja 2 ilman teknisiä apuvälineitä!

1. a) Yhdistä laskuun A–D sopiva vastaus I–IV. (Sama vastaus voi tulla useasti.) **(2p)**

A $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x+1}$	**I 1**
B $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$	**II 0**
C $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{(x-1)^2}$	**III kasvaa rajatta**
D $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2}{x-1}$	**IV ei raja-arvoa eikä epäoleellista raja-arvoa**

VASTAUKSET: A–II, B–II, C–III, C–IV

b) Onko väite A–D tosi vai epätosi? **(2p)**

A **Jos funktio f on kaikkialla derivoituva, niin** $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$**, missä $a\in\mathbb{R}$.** **tosi/epätosi**

B **Jos $f'(2)=4$, niin** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$**.** **tosi/epätosi**

C **Jos** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$**, niin $f'(3)=0$.** **tosi/epätosi**

D **Jos** $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=5$ **ja** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}=3$**, niin $f(2)=5$.** **tosi/epätosi**

VASTAUKSET: A–tosi, B–epätosi, C–tosi, C–tosi

c) Olkoon f funktio, jolla on seuraavat ominaisuudet: $f(x+y)=f(x)f(y)$ kaikilla reaaliluvuilla x ja y, $f(0)=1$ ja f on derivoituva muuttujan arvolla 0. Osoita erotusosamäärää käyttäen, että f on derivoituva kaikkialla ja että $f'(x)=f'(0)f(x)$. **(8p)**

VASTAUS:

Todistus: Olkoon $x\in\mathbb{R}$. Tällöin

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\overbrace{f(x)}^{=\text{joku vakio}}\,(f(h)-1)}{h}$$

$$= f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - \overbrace{1}^{=f(0)}}{h} = f(x)\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h}}_{=f'(0)}$$

$$= f(x)f'(0) = f'(0)f(x),$$

joten f on derivoituva pisteessä x ja $f'(x) = f'(0)f(x)$.

/12

2. **a) Voiko kahden epäjatkuvan funktion summafunktio olla jatkuva? Entä voiko epäjatkuvan ja jatkuvan funktion summafunktio olla jatkuva? Perustele, anna esimerkki jos voi. Älä jää jumiin tähän tehtävään! (4p)**

VASTAUS:

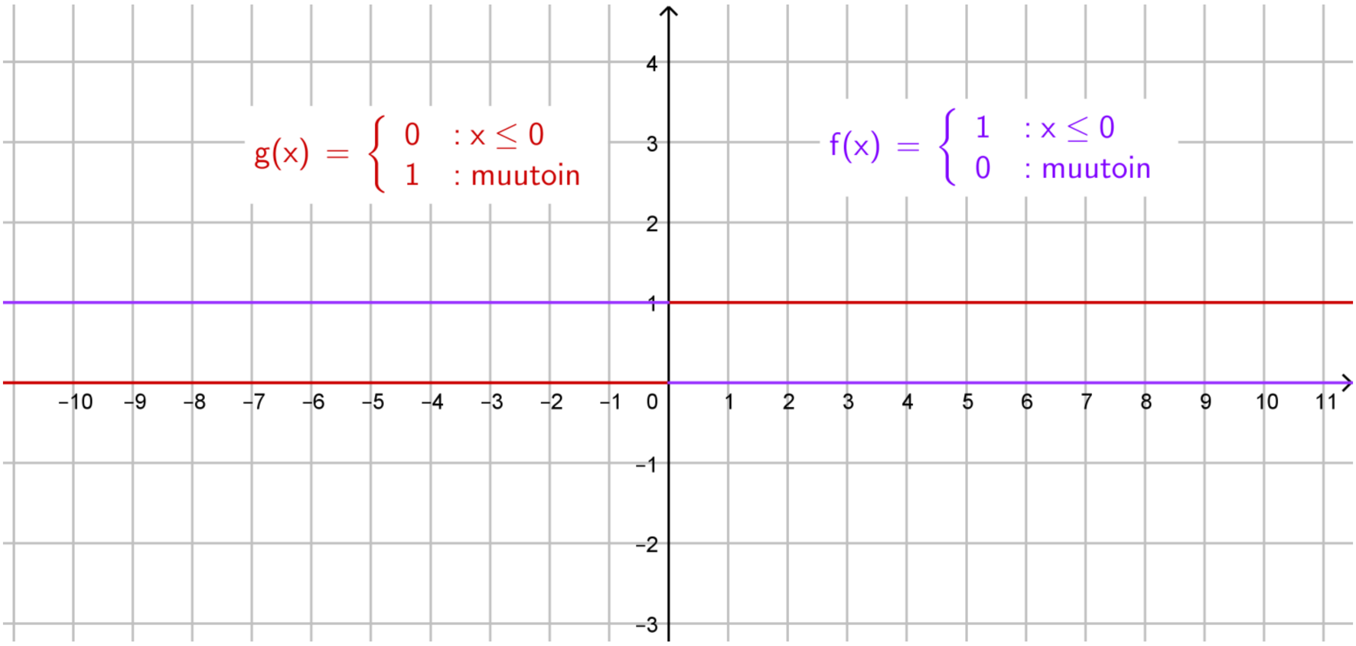
a) Voi olla, esimerkiksi olkoot

$$f: f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \leq 0 \\ 0, & \text{kun } x > 0 \end{cases}, \qquad g: g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq 0 \\ 1, & \text{kun } x > 0 \end{cases},$$

jolloin f ja g ovat selvästi epäjatkuvia kohdassa $x = 0$, mutta summafunktio

$$h = f + g: \quad h(x) = f(x) + g(x) = 1, \qquad \forall x \in \mathbb{R},$$

ja kyllä vakiofunktio on jatkuva.



Toisaalta voi myös tarkastella funktioita

$$f: f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{kun } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}, \qquad g: g(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases},$$

jotka ovat kaikkialla epäjatkuvia, mutta summafunktio $h(x) = 1$ on jatkuva.

Jatkuvan funktion ja epäjatkuvan funktion summafunktio **ei** voi olla jatkuva. Tehdään vastaoletus, että summafunktio h olisi jatkuva kohdassa $x = x_0$, jossa toinen (esimerkiksi) funktio f ei ole jatkuva. Tällöin funktio $k = h - g$ on kahden jatkuvan funktion erotusfunktiona jatkuva kohdassa $x = x_0$. Mutta $k = h - g = (g + f) - g = f$, joten ristiriita.

b) Suljetulla välillä $[0,1]$ jatkuvan ja avoimella välillä $]0,1[$ derivoituvan funktion f derivaatalle pätee $f'(x) \geq 2$ jokaiselle $x \in]0,1[$. Todista, että

$$\boldsymbol{f(x) \geq f(0) + 2x \quad \text{kaikilla} \;\; x \in [0,1].}$$

Ohje: Osoita aluksi, että väite pätee kun $x = 0$. Todista tämän jälkeen väliarvolauseen avulla, että väite pätee kun $0 < x \leq 1$. **(6p)**

VASTAUS:

Todistus: 1° Väite pätee kun $x = 0$, sillä

$$f(0) = f(0) + \underbrace{2 \cdot 0}_{=0}.$$

2° Olkoon $0 < x \leq 1$. Tällöin väliarvolauseen nojalla löytyy $\xi \in]0,1[$ siten, että

$$f(x) - f(0) = f'(\xi)(x - 0) = f'(\xi)x.$$

Oletuksen nojalla $f'(\xi) \geq 2$ ja $x > 0$, joten $f'(\xi)x \geq 2x$, ja näin ollen

$$f(x) - f(0) \geq 2x \quad \text{eli} \quad f(x) \geq f(0) + 2x.$$

c) Laske raja-arvo $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - x}$. **(2p)**

VASTAUS:

Aluksi muokataan nimittäjää

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^3 - x} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x \cdot (x^2 - 1)} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)}$$

joten löytyykö osoittajasta tekijä $x - 1$, joka voitaisiin sitten supistaa pois.

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(3x\quad)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\cdot(3x-1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{3x-1}{x\cdot(x+1)} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3\cdot x^2-4\cdot x+1}{x^3-x}\right) \qquad 1$$

/12

Tehtävästä 3 alkaen tekniset apuvälineet ovat sallittuja!

3. a) Millä vakion $\boldsymbol{a}$ arvoilla funktio

$$\boldsymbol{f(x)} = \begin{cases} \boldsymbol{x + a}, & \textbf{kun } \boldsymbol{x \le a} \\ \boldsymbol{x^3 - 2x}, & \textbf{kun } \boldsymbol{x > a} \end{cases}$$

on jatkuva kaikkialla? Piirrä kaikista tilanteista kuva Geogebralla ja liitä kuva vastaukseesi. (8p)

VASTAUS:

Koska a on vakio, niin funktiot $f_1\colon f_1(x) = x + a$ ja $f_2\colon f_2(x) = x^3 - 2x$ ovat polynomifunktioina jatkuvia määrittelyalueissaan. Funktion f ainoa epäjatkuvuuskohta saattaa täten olla kohdassa a. Jotta funktio f olisi kaikkialla jatkuva, on muodostettava yhtälö kohdassa $x = a$, jossa asetetaan funktiot f_1 ja f_2 yhtä suuriksi. Tällä tavoin voidaan ratkaista kysytty vakion a arvo (voi olla useita). Saadaan

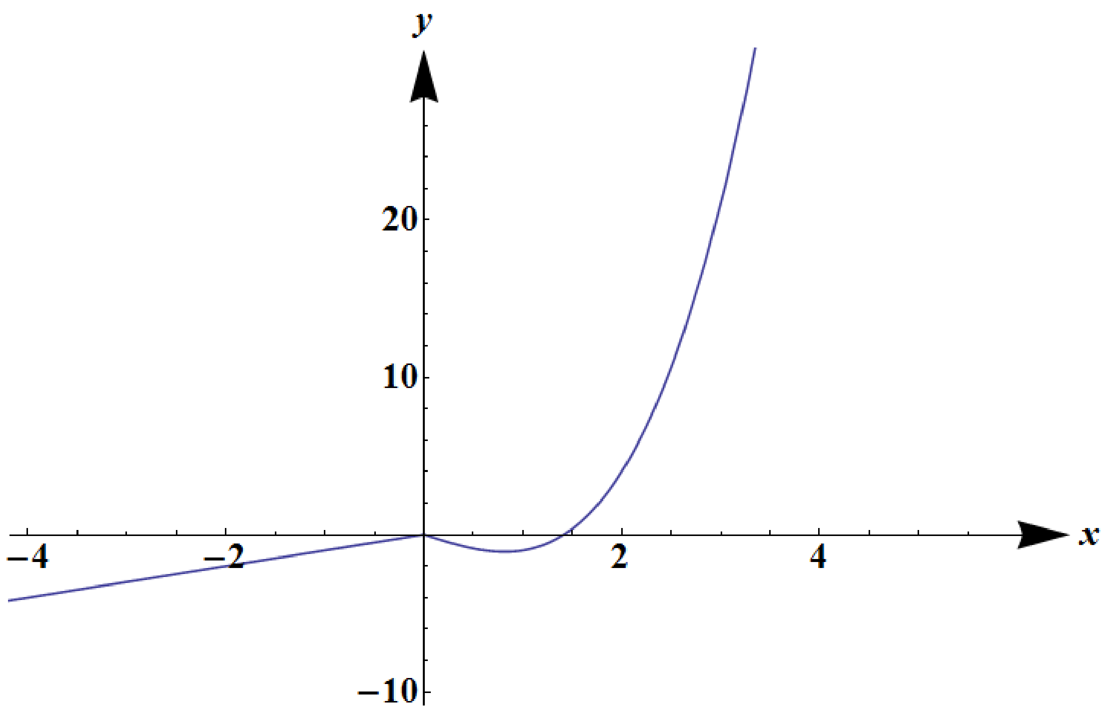
$$f_1(a) = f_2(a) \quad \text{eli} \quad a + a = a^3 - 2a \quad \text{ja edelleen}$$

$$2a = a^3 - 2a \Rightarrow a^3 - 4a = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ tai } a^2 = 4 \Rightarrow a = 0 \text{ tai } a = \pm 2.$$

Siis vakion a arvoilla $a = 0, \pm 2$ on funktio $f(x)$ jatkuva kaikkialla.

Tapaus $\boldsymbol{a} = \mathbf{0}$:

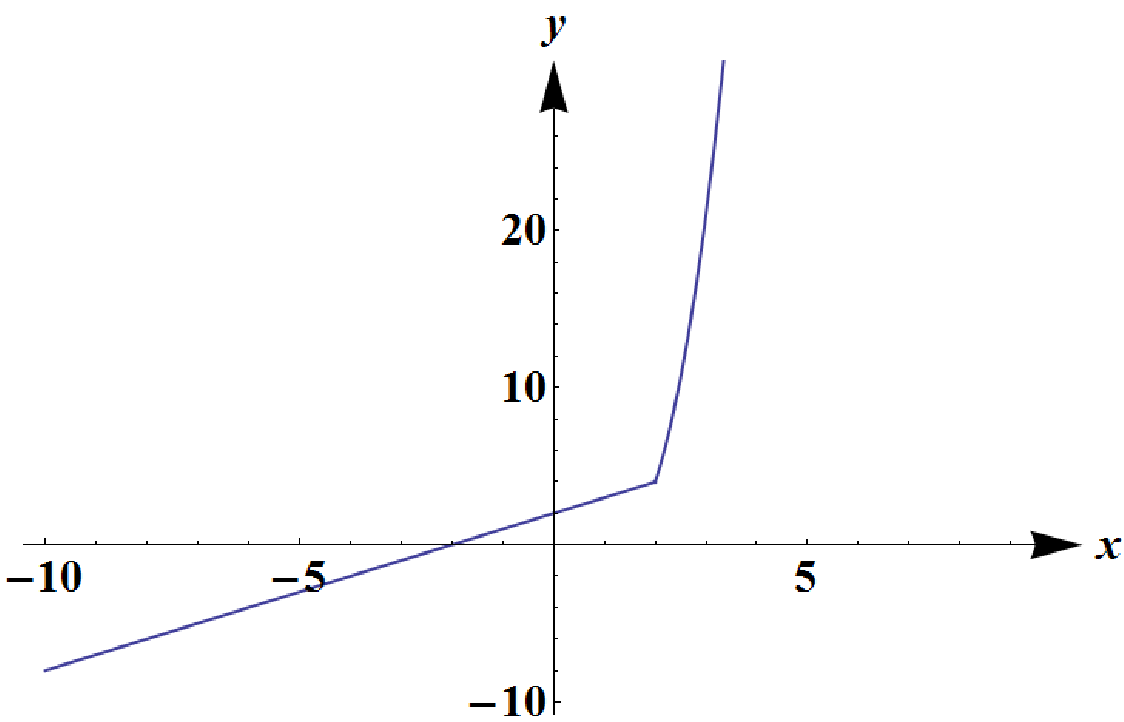
Nyt $f(a) = f(0) = 0 + 0 = 0$. Toisaalta, funktion f määritelmän nojalla $\lim_{x\to a-} f(x) = f(a)$ eli $\lim_{x\to 0-} f(x) = f(0) = 0$, sillä yhtäsuuruus mukana, kun lähestytään negatiiviselta puolelta ja positiiviselta puolelta lähestyttäessä $\lim_{x\to a+} f(x)$ eli $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}(x^3 - 2x) = 0 - 0 = 0 = f(0)$. Eli molemmat raja-arvot ovat samoja (on olemassa raja-arvo) ja lisäksi raja-arvo on sama kuin funktion arvo kohdassa $x = a = 0$. Siis funktio f on jatkuva kaikkialla, Kuva 1.



Kuva 1: Vakion a arvolla $a = 0$ on funktio $f(x)$ jatkuva myös kohdassa $x = 0$.

Tapaus $a = +2$:

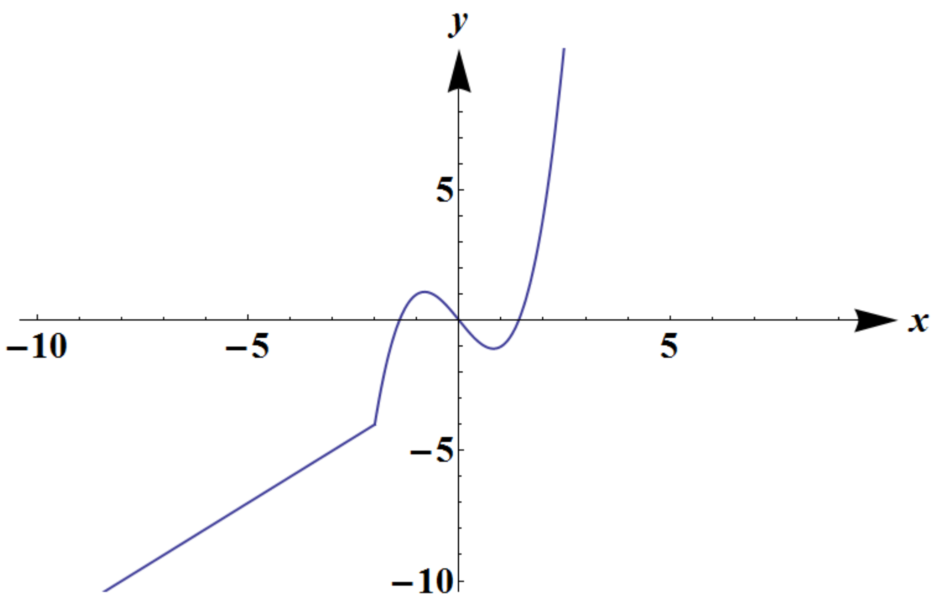
Nyt $f(a) = f(2) = 2 + 2 = 4$. Toisaalta, funktion f määritelmän nojalla $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$ eli $\lim_{x \to 2-} f(x) = f(2) = 4$, sillä yhtäsuuruus mukana, kun lähestytään negatiiviselta puolelta ja positiiviselta puolelta lähestyttäessä $\lim_{x \to a+} f(x)$ eli $\lim_{x \to 2+} f(x) = \lim_{x \to 2+}(x^3 - 2x) = 8 - 4 = 4 = f(2)$. Eli molemmat raja-arvot ovat samoja (on olemassa raja-arvo) ja lisäksi raja-arvo on sama kuin funktion arvo kohdassa $x = a = +2$. Siis funktio f on jatkuva kaikkialla, Kuva 2.



Kuva 2: Vakion a arvolla $a = +2$ on funktio $f(x)$ jatkuva myös kohdassa $x = 2$.

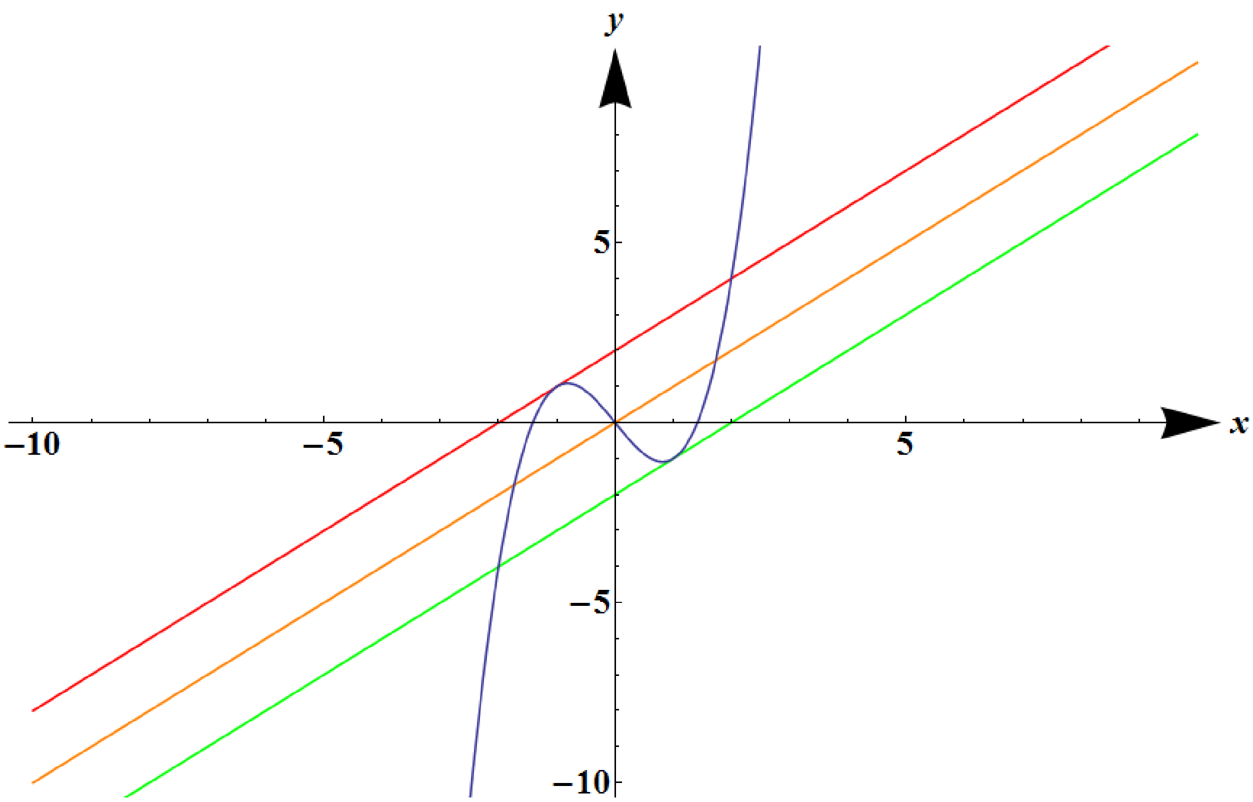
Tapaus $a = -2$:

Nyt $f(a) = f(-2) = -2 - 2 = -4$. Funktion f määritelmän nojalla $\lim_{x \to a-} f(x) = f(a)$ eli $\lim_{x \to -2-} f(x) = f(-2) = -4$, sillä yhtäsuuruus mukana, kun lähestytään negatiiviselta puolelta ja positiiviselta puolelta lähestyttäessä $\lim_{x \to a+} f(x)$ eli $\lim_{x \to -2+} f(x) = \lim_{x \to -2+}(x^3 - 2x) = -8 + 4 = -4 = f(-2)$. Eli molemmat raja-arvot ovat samoja (on olemassa raja-arvo) ja lisäksi raja-arvo on sama kuin funktion arvo kohdassa $x = a = -2$. Siis funktio f on jatkuva kaikkialla, Kuva 3.



Kuva 3: Vakion a arvolla $a = -2$ on funktio $f(x)$ jatkuva myös kohdassa $x = -2$.

Tarkastele vielä kaikkia tilanteita yhtä aikaa alla olevaa kuvaa, Kuva 4, apuna käyttäen.



Kuva 4: Sinisellä on piirretty käyrä $y = x^3 - 2x$, punaisella (ylin suora) suora $y = x + 2$, oranssilla (keskimmäinen suora) suora $y = x$ ja vihreällä (alin suora) suora $y = x - 2$.

b) Määritä ensin laskimella ja sitten laskusääntöjä käyttämällä raja-arvo **(4p)**

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right).$$

Piirrä tilanteesta kuva Geogebralla sisältäen tarvittavat asymptootit mikäli niitä on.

VASTAUS:

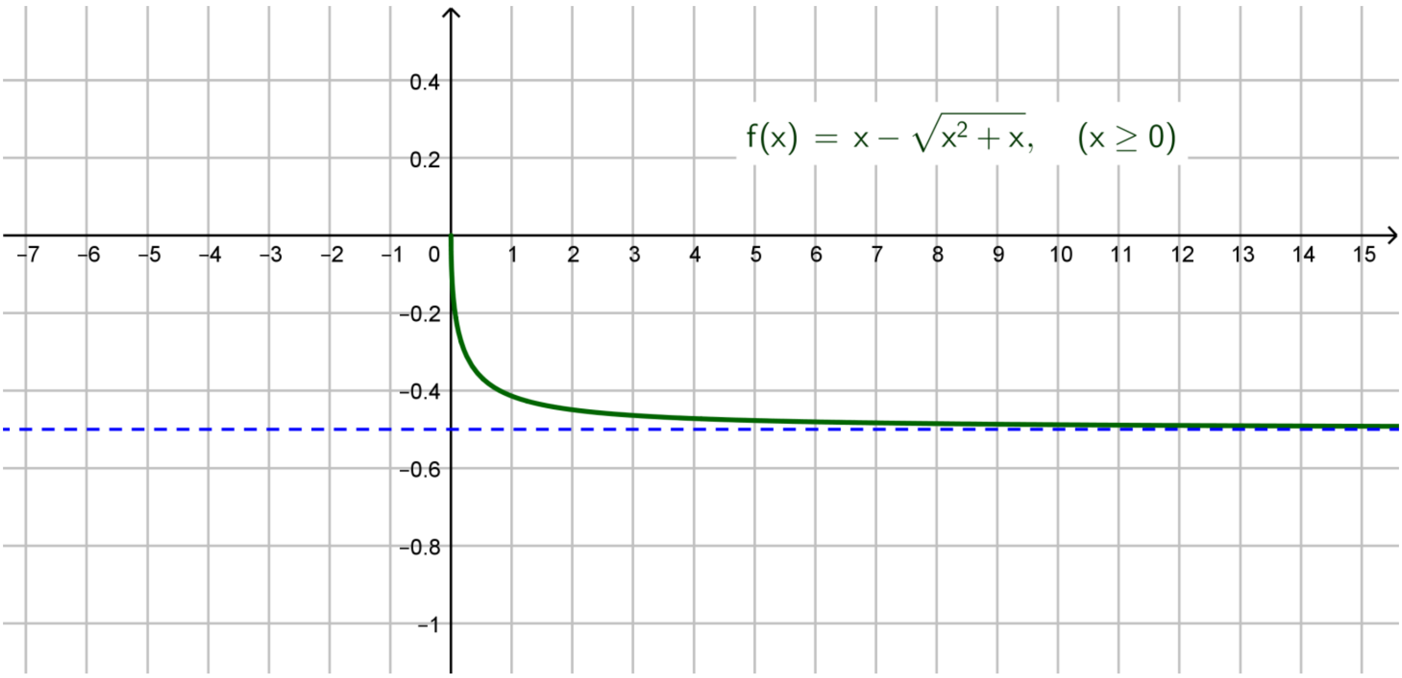
Laskin

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right) \qquad \frac{-1}{2}$$

Raja-arvon laskusääntöjä käyttäen saadaan

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x^2+x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-(x^2+x)}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\overset{x>0}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x}}{\frac{x}{x}+\frac{x}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=\frac{-1}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$



/12

4. a) Mitä voidaan sanoa funktion

$$f: f(x) = \frac{|x| - 1}{x - 1}, \qquad x \neq 1$$

jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta kohdassa $x = 0$? Perustele! **(5p)**

VASTAUS:

Koska $f(0) = \frac{|0|-1}{0-1} = 1$ ja $\lim_{x \to 0-} \frac{|x|-1}{x-1} = \frac{0-1}{0-1} = 1$, niin funktio f on jatkuva kohdassa $x = 0$. Toispuoleiset erotusosamäärän raja-arvot:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{|x|-1}{x-1} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{|x|-1}{x-1} - \frac{x-1}{x-1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{|x|-1-x+1}{x-1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{|x|-x}{x(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 0-} \frac{|x|-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0-} \frac{-x-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0-} \frac{-2x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0-} \frac{-2}{x-1} = \frac{-2}{0-1} = 2$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{|x|-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0+} \frac{x-x}{x(x-1)} = \lim_{x\to 0+} \frac{0}{x(x-1)} = 0$$

Funktio f ei näin ollen ole derivoituva kohdassa $x = 0$.

b) Funktiosta f tiedetään, että se on määritelty jokaisella reaaliluvulla ja että $2 \leq f(x) \leq 5$ kaikilla x. Mitä voidaan sanoa funktion g jatkuvuudesta ja derivoituvuudesta kohdassa $x = 0$, kun

i) $g(x) = x \cdot f(x)$

ii) $g(x) = x^2 \cdot f(x)$

VASTAUS:

i) Funktio g on jatkuva kohdassa $x = 0$, jos $g(0) = \lim_{x\to 0} g(x)$. Koska $g(0) = 0 \cdot f(0) = 0$ ja

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} (\underbrace{x}_{\to 0} \cdot \underbrace{f(x)}_{2 \leq f(x) \leq 5}) = 0$$

, niin funktio g on jatkuva kohdassa $x = 0$.

Funktio g on derivoituva kohdassa $x = 0$, jos raja-arvo $\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0}$ on olemassa. Koska

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{xf(x) - 0 \cdot f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{xf(x)}{x} = \lim_{x\to 0} f(x),$$

niin funktion f raja-arvon olemassaolosta kohdassa $x = 0$ ei tiedetä mitään, joten funktion g derivoituvuudesta kohdassa $x = 0$ ei voida sanoa mitään.

ii) koska $g(0) = 0^2 \cdot f(0) = 0$ ja $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0}(\underbrace{x^2}_{\to 0} \cdot \underbrace{f(x)}_{2\le f(x)\le 5}) = 0$, niin funktio g on jatkuva kohdassa $x = 0$. Edelleen koska erotusosamäärän raja-arvolle

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot f(x) - 0^2\cdot f(0)}{x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} x\cdot f(x) \overset{\text{a kohta}}{=} 0$$

niin funktio g on derivoituva kohdassa $x = 0$.

/12
/48