Matematiikan TESTI 4, Maa13 – Diff.-ja int.-laskennan jatkokurssi – RATKAISUT **Sievin lukio**
III jakso/2018 **Nimi:**
VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN!
MAOL/LIITE/taulukot.com JA LASKIN ON SALLITTU ELLEI TOISIN MAINITTU!
TARKISTA TEHTÄVÄT TESTIN JÄLKEEN JA ANNA PISTEESI RUUTUUN!

Ratkaise tehtävät 1 ja 2 ilman teknisiä apuvälineitä!

1. **a)** Onko väite A–D oikein vai väärin? (3p)

A Jos jatkuvan funktion f derivaatta on kaikkialla positiivinen,

funktiolla on käänteisfunktio. oikein/väärin

B Vain kasvavalla funktiolla voi olla käänteisfunktio. oikein/väärin

C Tiedetään, että funktiolla f on käänteisfunktio ja että

$f(1) = 2, f(3) = 4$ ja $f(5) = 3$. Tällöin $f^{-1}(4) = 3$. oikein/väärin

D Funktion $f(x) = \sqrt{x+3}, x \geq -3$ käänteisfunktion määrittelyjoukko on $x \geq -3$. oikein/väärin

VASTAUKSET: A–oikein, B–väärin, C–oikein, D–väärin

b) Yhdistä funktioon $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ liittyvät oikeat kohdat A–D ja I–IV. (3p)

A	$f(1,1)$	**I**	0
B	$f(2,1)$	**II**	1
C	$f_x'(1,1)$	**III**	2
D	$f_y'(0,1)$	**IV**	3

VASTAUKSET: A–I, B–II, C–I, D–III

c) Onko funktioon $f(x,y) = x + 2y - 3$ liittyvä väite A–D oikein vai väärin? (3p)

A Funktion kuvaajalla on piste $(1, 2, -3)$. oikein/väärin

B Funktion kuvaaja leikkaa x-akselin pisteessä $(3, 0, 0)$. oikein/väärin

C Funktion tasa-arvokäyrä xy-tasossa on suora $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$. oikein/väärin

D Funktiolla voi olla ääriarvopisteenä $(0, 0, -3)$. oikein/väärin

VASTAUKSET: A–väärin, B–oikein, C–oikein, D–väärin

d) Määritä funktion $f: f(x) = \sqrt[3]{x^2}, x > 0$ derivaattafunktio käänteisfunktion derivaatan avulla. (3p)

VASTAUS:

Koska

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \Leftrightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)}$$

ja $y = \sqrt[3]{x^2} \implies = y^{\frac{2}{3}}$, niin

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(y)} = \frac{1}{\frac{3}{2} \cdot y^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\frac{3}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

/12

2. a) Määritä funktion f osittaisderivaatat ja niiden likiarvot pisteessä $(1,2)$, kun (6p)

i) $f(x,y) = 2xy - 3y$

ii) $f(x,y) = x\sqrt{y} - 3 \cdot e^{\sin x - y}$

iii) $f(x,y) = \ln(2x-3) - \sqrt[5]{y}$

VASTAUS: Saadaan:

i)

$$\mathrm{f_x}'(x,y) = 2y \quad \implies \quad \mathrm{f_x}'(1,2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\mathrm{f_y}'(x,y) = 2x - 3 \quad \implies \quad \mathrm{f_y}'(1,2) = 2 \cdot 1 - 3 = -1$$

ii)

$$\mathrm{f_x}'(x,y) = \sqrt{y} - 3 \cdot e^{\sin x - y} \cdot \cos x \quad \implies \quad \mathrm{f_x}'(1,2) = \sqrt{2} - 3 \cdot e^{\sin 1 - 2} \cdot \cos 1 \approx 0{,}90533$$

$$\mathrm{f_y}'(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{y}} - 3 \cdot e^{\sin x - y} \cdot (-1) \quad \implies \quad \mathrm{f_y}'(1,2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} + 3 \cdot e^{\sin 1 - 2} \approx 1{,}29539$$

iii)

$$\mathrm{f_x}'(x,y) = \frac{1}{2x-3} \cdot 2 \quad \implies \quad \mathrm{f_x}'(1,2) = \frac{2}{2 \cdot 1 - 3} = -2$$

$$\mathrm{f_y}'(x,y) = -\frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{y^4}} \quad \implies \quad \mathrm{f_y}'(1,2) = -\frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{2^4}} = -0{,}11486$$

b) Osoita, että funktiolla $f: [-3,5] \to \mathbb{R}, f(x) = \sqrt{2x+6}$ on käänteisfunktio. Muodosta funktion f käänteisfunktion lauseke ja määritä funktion f^{-1} määrittelyjoukko. (4p)

VASTAUS: Koska

$$f'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x+6}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x+6}} \geq 0, \qquad \forall\, x \in [-3,5]$$

niin asia selvä (Lause), sillä $f'(x) = 0$ vain kun $x = -3$. Käänteisfunktion lausekkeeksi saadaan:

$$y = \sqrt{2x+6}$$

$$y^2 = 2x + 6$$

$$y^2 - 6 = 2x$$

$$\Longrightarrow \quad x = \frac{1}{2} \cdot y^2 - 3, \qquad y \in [0,4]$$

Siis $f^{-1}(y) = \frac{1}{2} \cdot y^2 - 3$ ja kun $x = -3$, niin $y = 0$ sekä kun $x = 5$, niin $y = 4$ ja näin ollen $\mathcal{A}_f = \mathcal{M}_{f^{-1}} = [0,4]$.

c) Ovatko funktiot f ja g toistensa käänteisfunktioita? Perustele. (2p)

$$f: f(x) = \ln x\,, \qquad g: g(x) = \frac{1}{x}, \qquad x > 0$$

VASTAUS: Koska

$$(f \circ g)(x) = \ln \frac{1}{x} = -\ln x\,, \qquad x > 0$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\ln x} = (\ln x)^{-1}, \qquad x > 0$$

niin f ja g eivät ole toistensa käänteisfunktioita.

/12

Tehtävästä 3 alkaen tekniset apuvälineet ovat sallittuja!

3. a) Määritä funktion (6p)

$$f\colon f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{4}} + 5, \qquad -30 \le x \le 6$$

käänteisfunktio f^{-1} sekä käänteisfunktion määrittely- ja arvojoukot $\left(\mathcal{M}_{f^{-1}}, \mathcal{A}_{f^{-1}}\right)$ sekä määritä $(f^{-1})'(4)$ funktion f derivaatan f' avulla.

VASTAUS: Merkitään $y = f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-2}{4}} + 5, -30 \le x \ge 6$. Ratkaistaan muuttuja x muuttujan y:n suhteen:

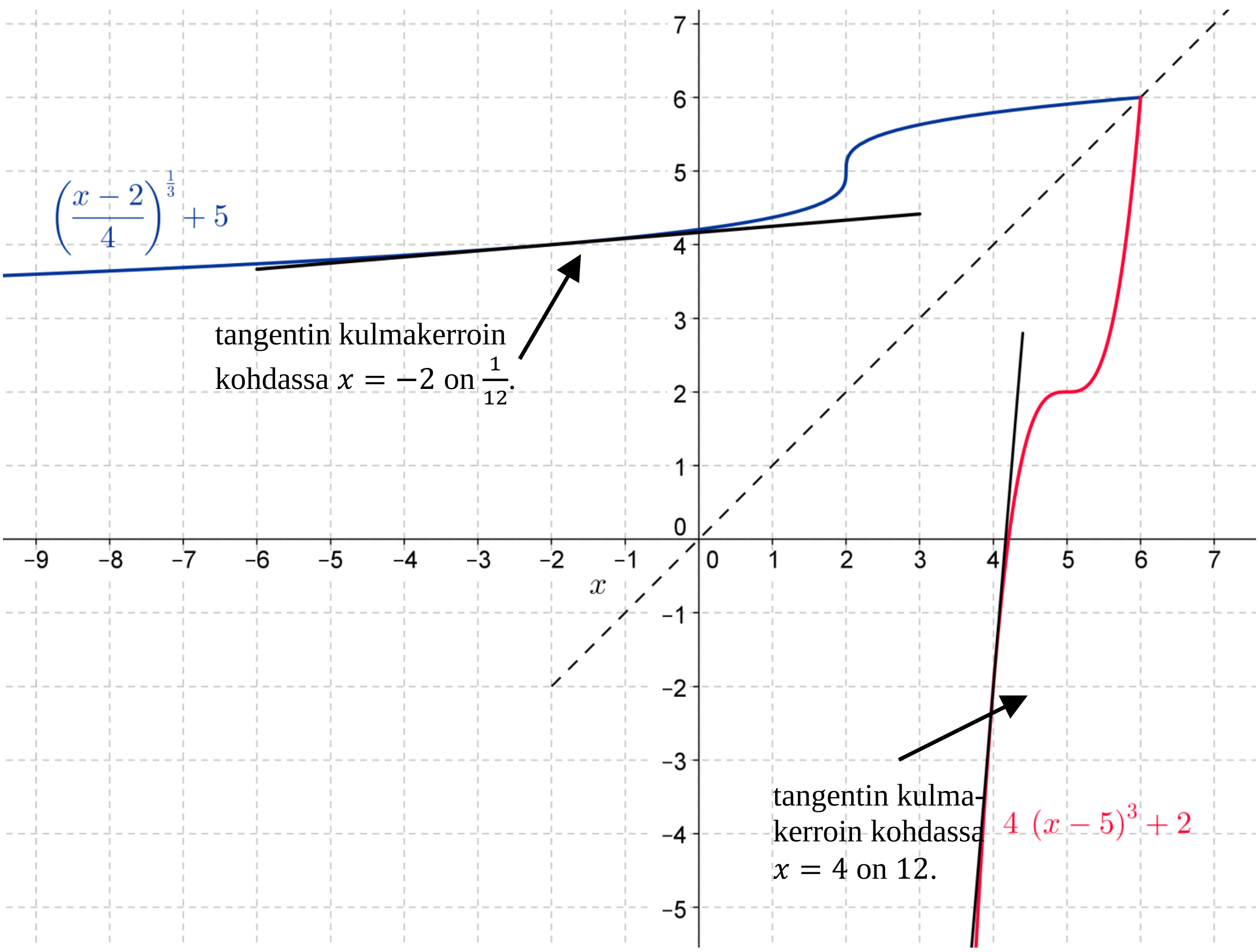
$$y = \sqrt[3]{\frac{x-2}{4}} + 5 \quad \Leftrightarrow \quad y - 5 = \sqrt[3]{\frac{x-2}{4}} \quad \Leftrightarrow \quad (y-5)^3 = \frac{x-2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4(y-5)^3 = x - 2$$

Näin ollen $x = 4(y-5)^3 + 2$ ja on saatu käänteiskuvaus, eli käänteisfunktio $f^{-1}(y) = g(y)$,

$$g(y) = x = x(y) = 4(y-5)^3 + 2.$$

Vaihdetaan vielä muuttuja $y \to x$, jolloin

$$g(x) = 4(x-5)^3 + 2.$$



Käänteisfunktion $\boldsymbol{f^{-1}}$ määrittely- ja arvojoukot $\boldsymbol{\mathcal{M}_{f^{-1}}},\ \boldsymbol{\mathcal{A}_{f^{-1}}}$:

Koska funktio f oli määritelty välillä $-30 \leq x \geq 6$, niin lasketaan mitä arvoja f saa. Funktio f on jatkuva ja aidosti monotoninen, joten f saa kaikki arvot välin päätepisteiden arvojen $f(-30)$ ja $f(6)$ välil-tä.

$$\begin{cases} f(-30) = y(-30) = \sqrt[3]{\dfrac{-30-2}{4}} + 5 = \sqrt[3]{-8} + 5 = -2 + 5 = 3 \\ f(6) = y(6) = \sqrt[3]{\dfrac{6-2}{4}} + 5 = \sqrt[3]{1} + 5 = 1 + 5 = 6 \end{cases}$$

Funktio ja sen käänteisfunktion arvo- ja määrittelyjoukot ovat kääntäen samat, joten määrittelyjoukoksi saadaan $\mathcal{M}_{f^{-1}} = [3,6]$ ja arvojoukoksi $\mathcal{A}_{f^{-1}} = [-30,6]$. Siis

$$\mathcal{M}_{f^{-1}} = [3,6] = \mathcal{A}_f, \qquad \mathcal{A}_{f^{-1}} = [-30,6] = \mathcal{M}_f$$

Käänteisfunktion $\boldsymbol{f^{-1}}$ derivaatan arvo $\boldsymbol{(f^{-1})'(4)}$:

Koska

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(x)}$$

sellaiselle x, jolle $f(x) = 4$, niin ratkaistaan yhtälö $\sqrt[3]{\frac{x-2}{4}} + 5 = 4$, saadaan

$$\sqrt[3]{\frac{x-2}{4}} + 5 = 4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{\frac{x-2}{4}} = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x-2}{4} = -1 \quad \Rightarrow \quad x - 2 = -4 \quad \Leftrightarrow \quad x = -2.$$

Koska $f'(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{x-2}{4}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{12 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{4}\right)^2}}$, niin (katso myös kuva yllä)

$$(f^{-1})'(4) = \frac{1}{f'(-2)} = \frac{1}{\dfrac{1}{12 \cdot \sqrt[3]{\left(\dfrac{-2-2}{4}\right)^2}}} = 12 \cdot \sqrt[3]{1} = 12.$$

b) Voidaanko funktio $f\colon f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ määritellä pisteessä $(0,0)$ niin, että funktio f on jatkuva. (6p)

Ohje: Piirrä ensin Geogebralla kuva. Lähesty sitten pistettä $(0,0)$ pitkin x-akselia, eli kun $y = 0$ (kuvaajasta katsoen) ja päättele raja-arvo

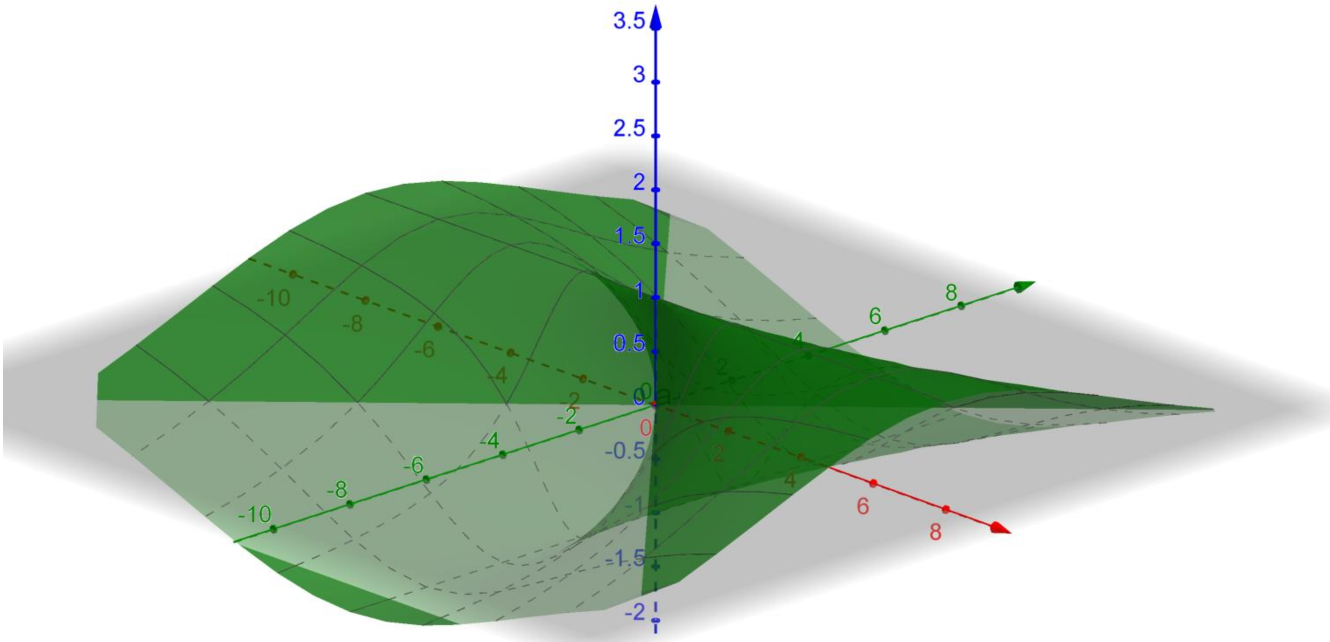
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,.$$

Lähesty sitten pistettä $(0,0)$ pitkin y-akselia, eli kun $x = 0$ (kuvaajasta katsoen) ja päättele raja-arvo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)\,.$$

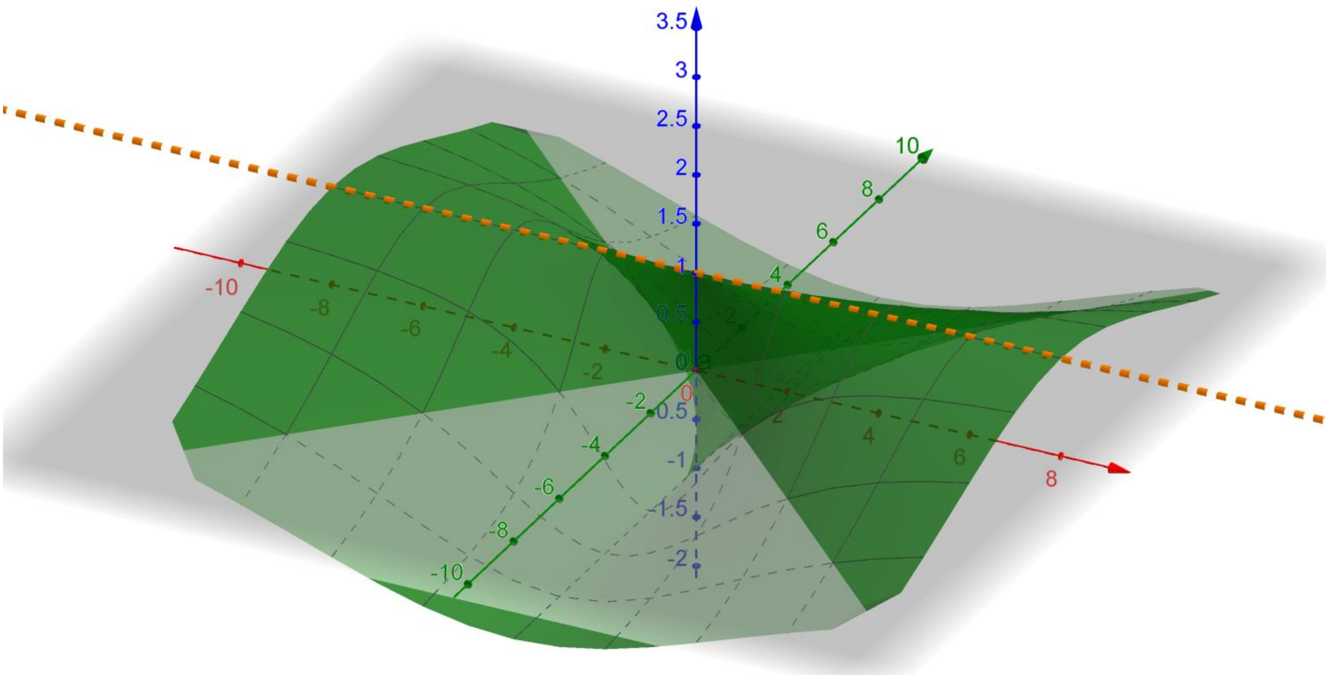
Vastaavasti pitkin suoria $y = x$ ja $y = -x$. Tee johtopäätös, lisää kuvia.

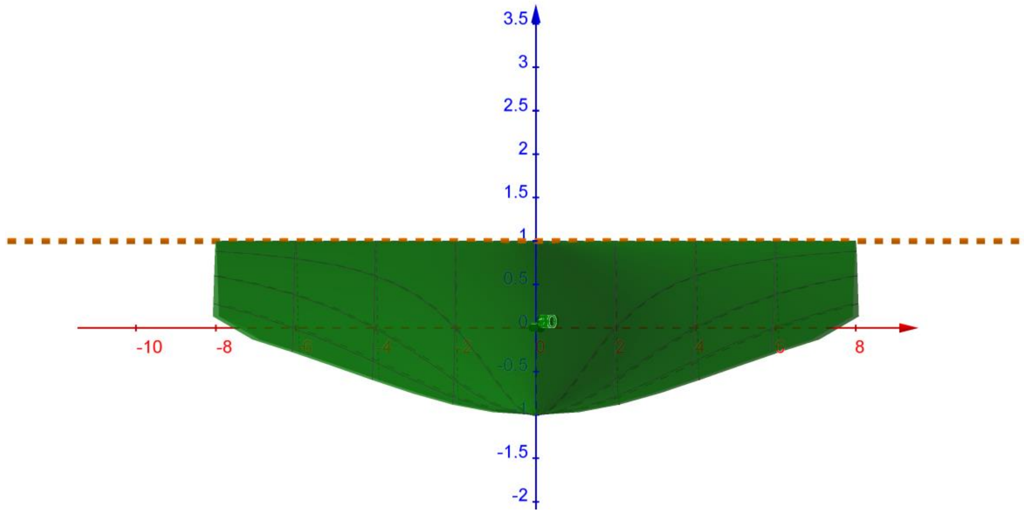
VASTAUS: Piirretään funktion $f\colon f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ kuvaaja. Värit: x-akseli on punainen, y-akseli on vihreä ja z-akseli on sininen.



Havaitaan (kuvasta, johon piirretty suora $\overline{r_1} = \overline{k} + t \cdot \overline{i},\ \in \mathbb{R}$ katsottuna), että

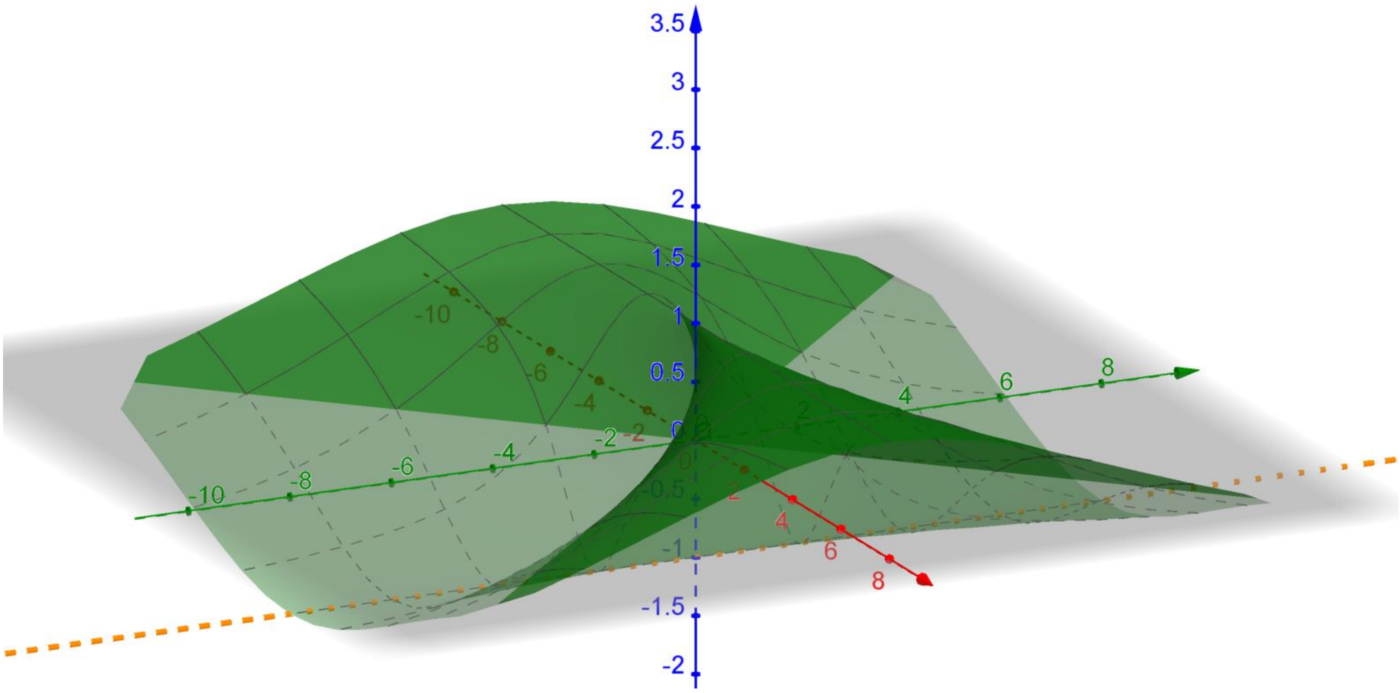
$$\lim_{(x,0)\to(0,0)} f(x,y) = 1$$

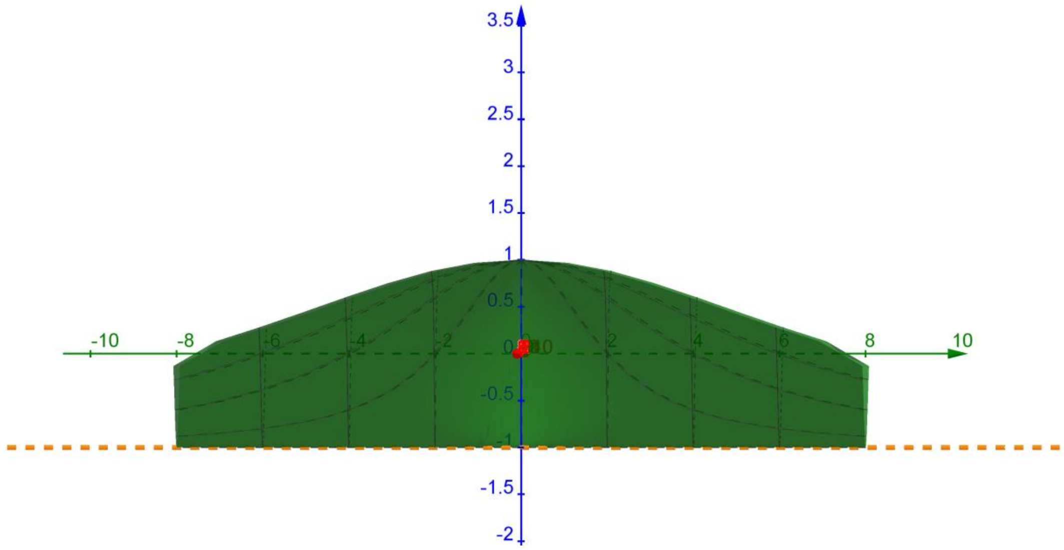




Havaitaan (kuvasta, johon piirretty suora $\overline{r_2} = -\overline{k} + t \cdot \overline{j},\ \in \mathbb{R}$ katsottuna), että

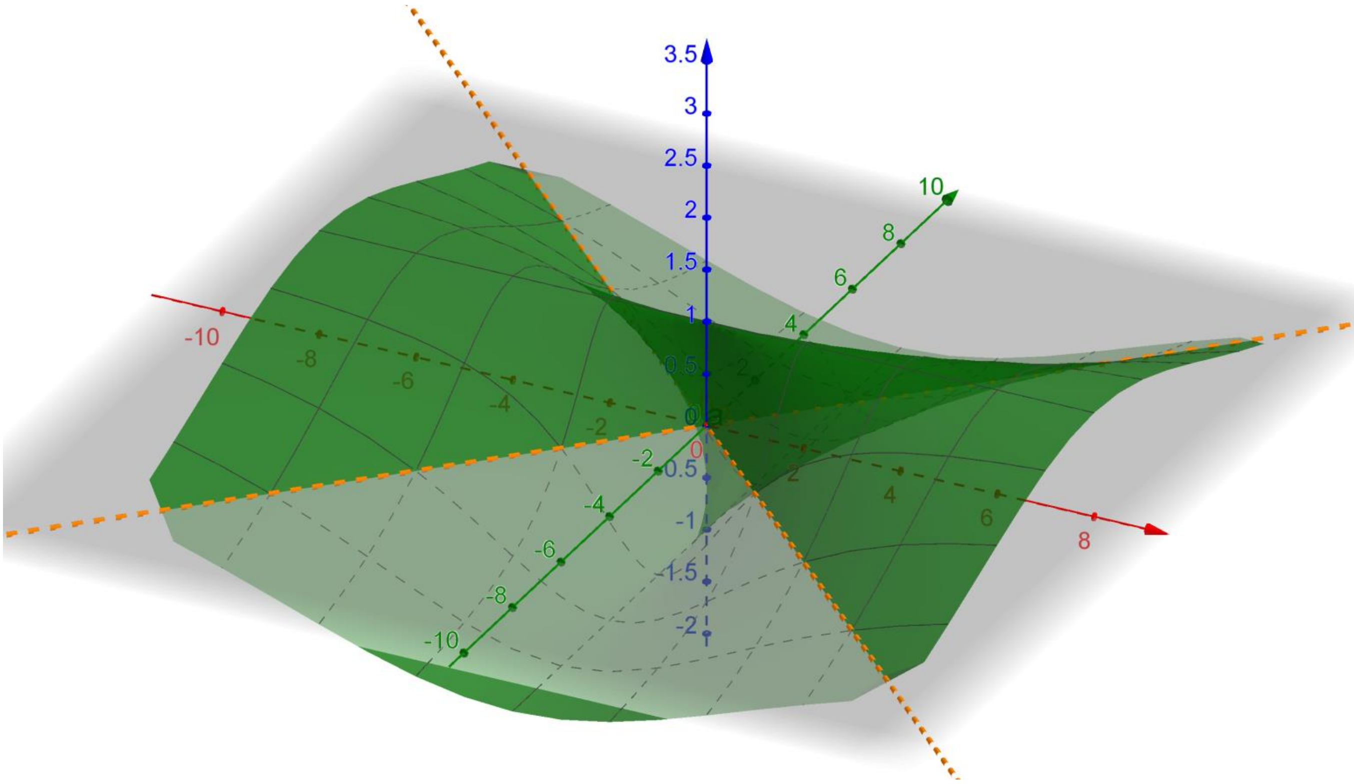
$$\lim_{(0,y)\to(0,0)} f(x,y) = -1$$





Havaitaan (kuvasta, johon piirretty suorat $\overline{r_3} = t \cdot (\overline{i} + \overline{j}),\ \in \mathbb{R}$ ja $\overline{r_4} = t \cdot (-\overline{i} + \overline{j}),\ t \in \mathbb{R}$ katsottuna), että

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f(x,y) = 0, \qquad \lim_{(x,-x)\to(0,0)} f(x,y) = 0$$

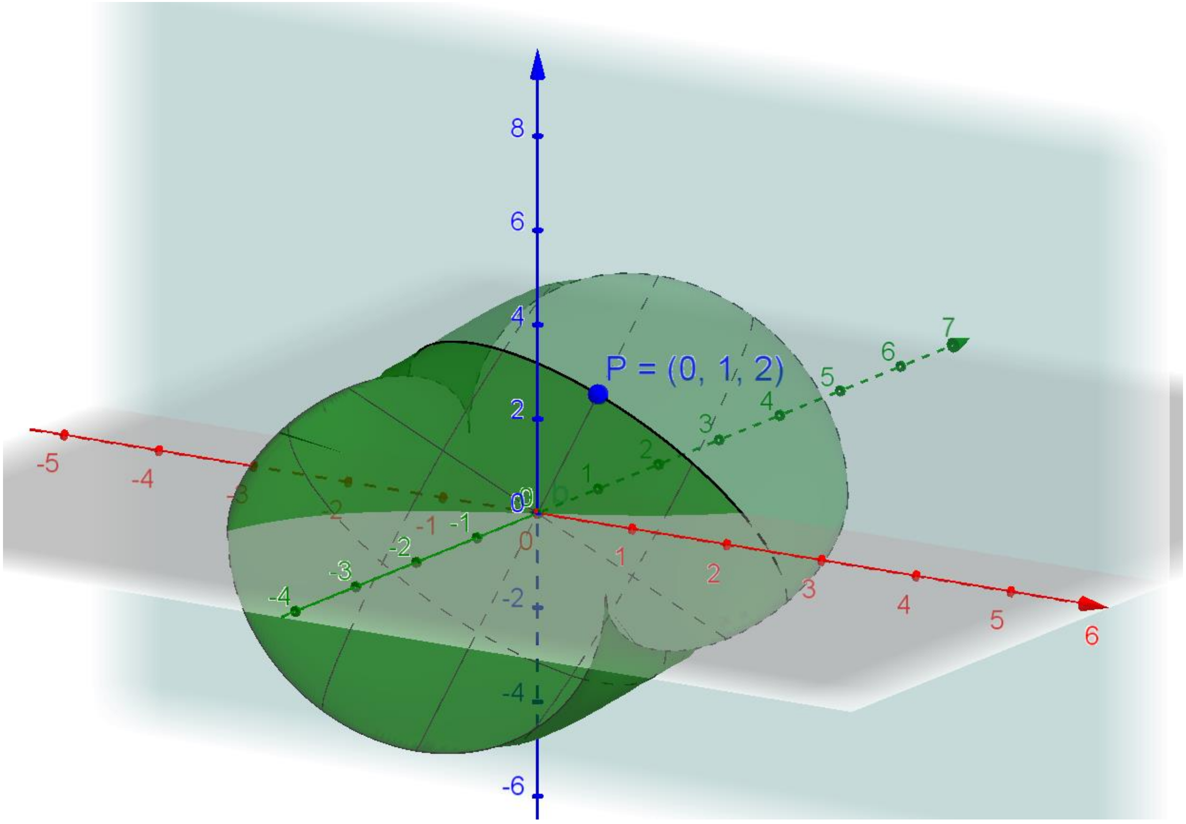


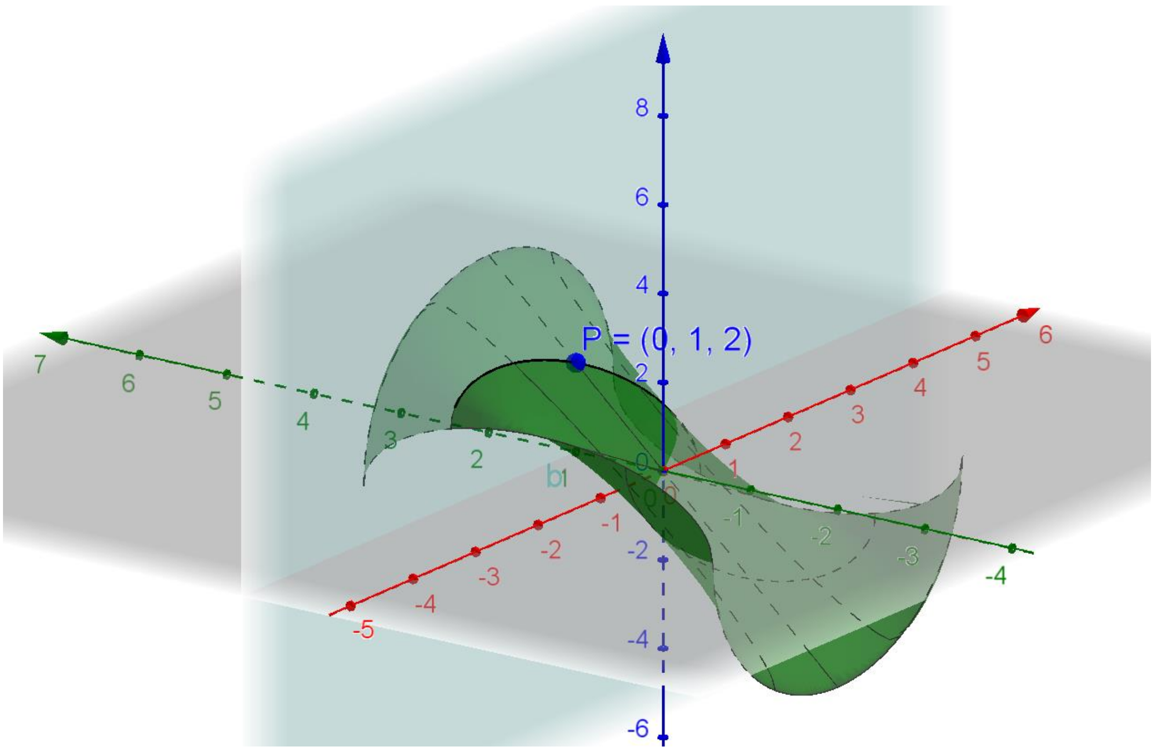
Näin ollen voidaan todeta, ettei funktiota f voi määritellä pisteessä $(0,0)$ mitenkään, jotta jatkuvuus saataisiin voimaan.

/12

4. **a)** Funktion $f: f(x,y) = y \cdot \sqrt{4-x^2} - 0{,}5 \cdot x \cdot \sqrt{4-y^2}$ kuvaajaa leikataan tasolla $y = 1$. Määritä jokin pisteeseen $P = (0,1,2)$ asetetun suoran suuntavektori, kun suora on funktion f kuvaajan ja tason $y = 1$ leikkauskäyrän tangentti. (6p)

VASTAUS: Alla olevassa kuvassa on funktion f kuvaaja, piste $P = (0,1,2)$ ja taso $y = 1$. Värit: x-akseli on punainen, y-akseli on vihreä ja z-akseli on sininen.





Koska taso $y = 1$ leikkaa f:n kuvaajaa on leikkauskuvio (yllä olevissa kuvissa mustalla) käyrä

$$z = f(x,1) = 1 \cdot \sqrt{4-x^2} - 0{,}5 \cdot x \cdot \sqrt{4-1^2} = \sqrt{4-x^2} - \frac{\sqrt{3}}{2}x\,.$$

Tämän käyrän $z = z(x)$ tangentin kulmakerroin (derivaatan $z'(x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ arvo pisteessä P, eli $z'(0)$) on

$$z'(0) = \frac{-0}{\sqrt{4-0^2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0{,}866$$

Näin ollen tangentin yhtälö

$$z - z_0 = k \cdot (x - x_0)$$

$$z - z(x_0, 1) = z'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$z - z(0{,}1) = z'(0) \cdot (x - 0)$$

$$z - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (x - 0)$$

$$\Rightarrow \qquad z = -\frac{\sqrt{3}}{2}x + 2$$

Tästä ”ratkaistusta muodosta” ei heti näe suuntavektoria, joten palataan aiempaan välivaiheeseen

$$z - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (x - 0)$$

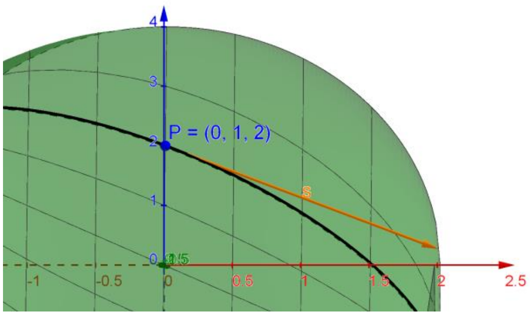
ja muokataan tämä suoran yhtälö muotoon $\frac{z-z_0}{s_{\bar{k}}} = \frac{x-x_0}{s_{\bar{i}}}$, jonka nimittäjien kertoimista saadaan suuntavektori $\bar{s} = s_{\bar{i}} \cdot \bar{i} + s_{\bar{k}} \cdot \bar{k}$. Siis

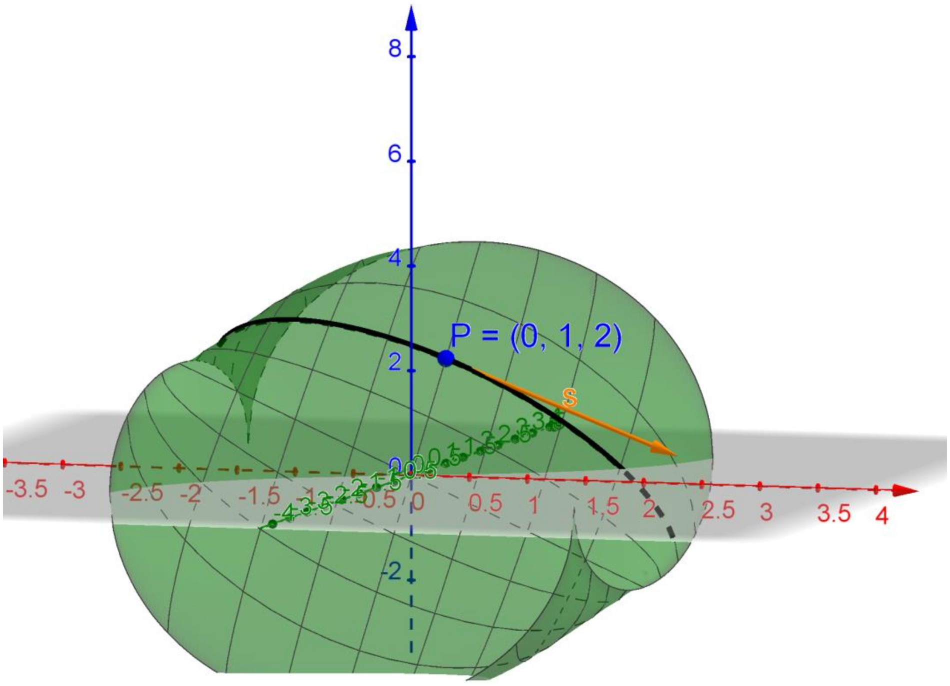
$$z - 2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (x - 0) \quad \Rightarrow \quad \frac{z-2}{-\sqrt{3}} = \frac{x-0}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{s} = 2 \cdot \bar{i} - \sqrt{3} \cdot \bar{k}$$

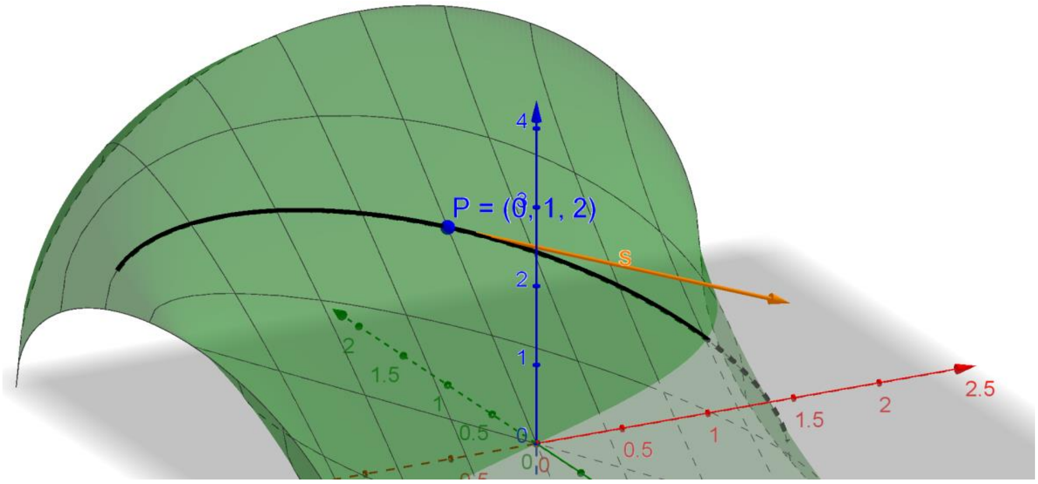
Edelleen yksikkövektoriksi tulee

$$\Rightarrow \qquad \bar{s}^0 = \frac{\bar{s}}{|\bar{s}|} = \frac{2 \cdot \bar{i} - \sqrt{3} \cdot \bar{k}}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \bar{k}\,.$$

Alla olevissa kuvissa on pisteeseen P asetettu vektori $\bar{s}$.







b) Piirrä funktion $f: f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy^2, (x,y) \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right] \times \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ tasa-arvokäyrästöä 1:n välein (hyödynnä liukukytkintä ja jälki käyttöön komentoa geogebrassa) sekä määritä kriittiset pisteet ja niiden laatu. (6p)

Ohje: Merkintä $(x,y) \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right] \times \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ tarkoittaa sitä, että x:n arvot ovat $-3/2$:sta 2:een ja y:n arvot $-\frac{5}{2}$:sta $\frac{5}{2}$:een, eli geogebraan kirjoita:

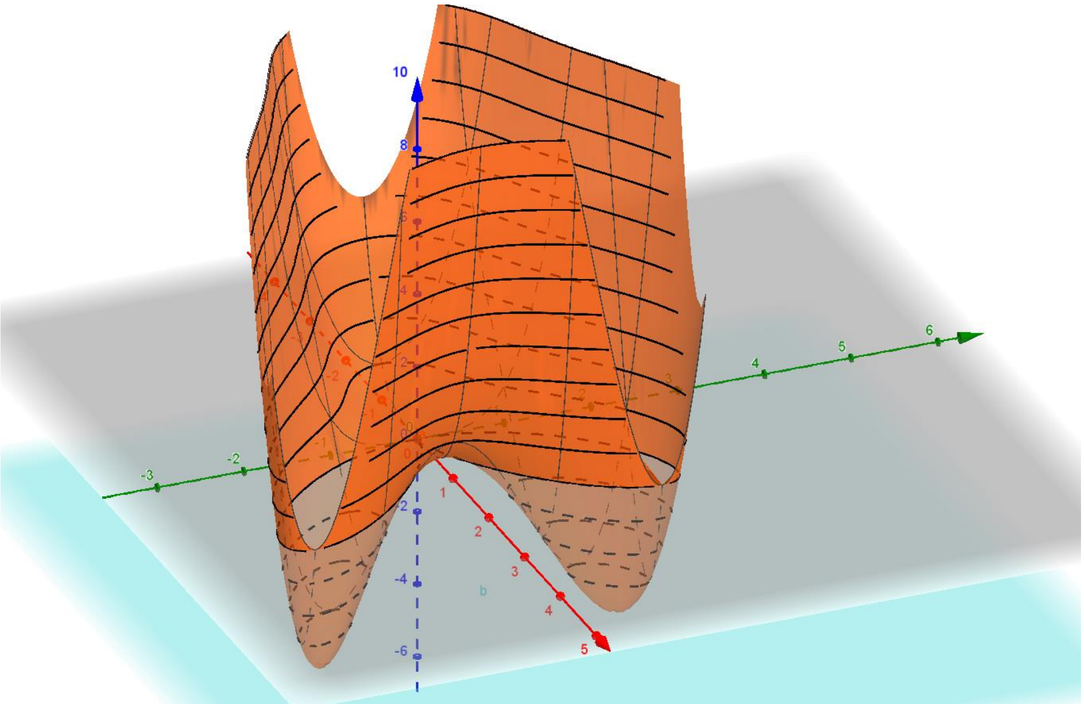
Jos(-3/2 ≤ x ≤ 2, Jos(-5/2 ≤ y ≤ 5/2, $x^4 + y^4 - 4x\ y^2$))

Hyödynnä laadun määrittämisessä tunnilla käytyä differentiaalilaskennan seurauslausetta.

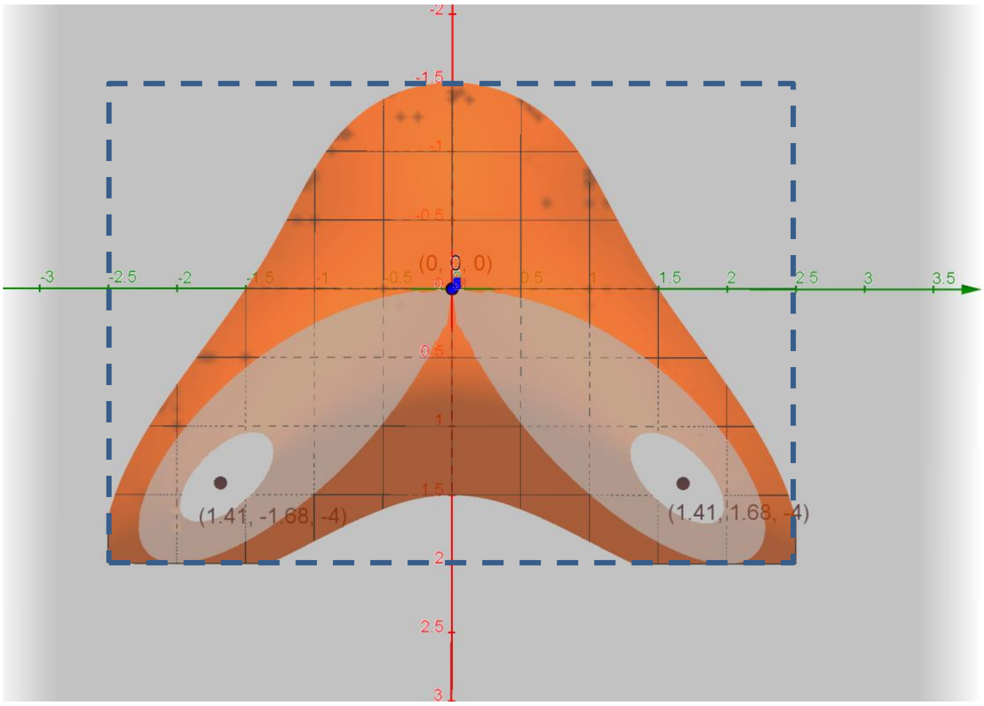
VASTAUS: Alla olevassa kuvassa on funktion

$$f: f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy^2, \qquad (x,y) \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right] \times \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$$

tasa-arvokäyrästöä 1:n välein. Värit: x-akseli on punainen, y-akseli on vihreä ja z-akseli on sininen.



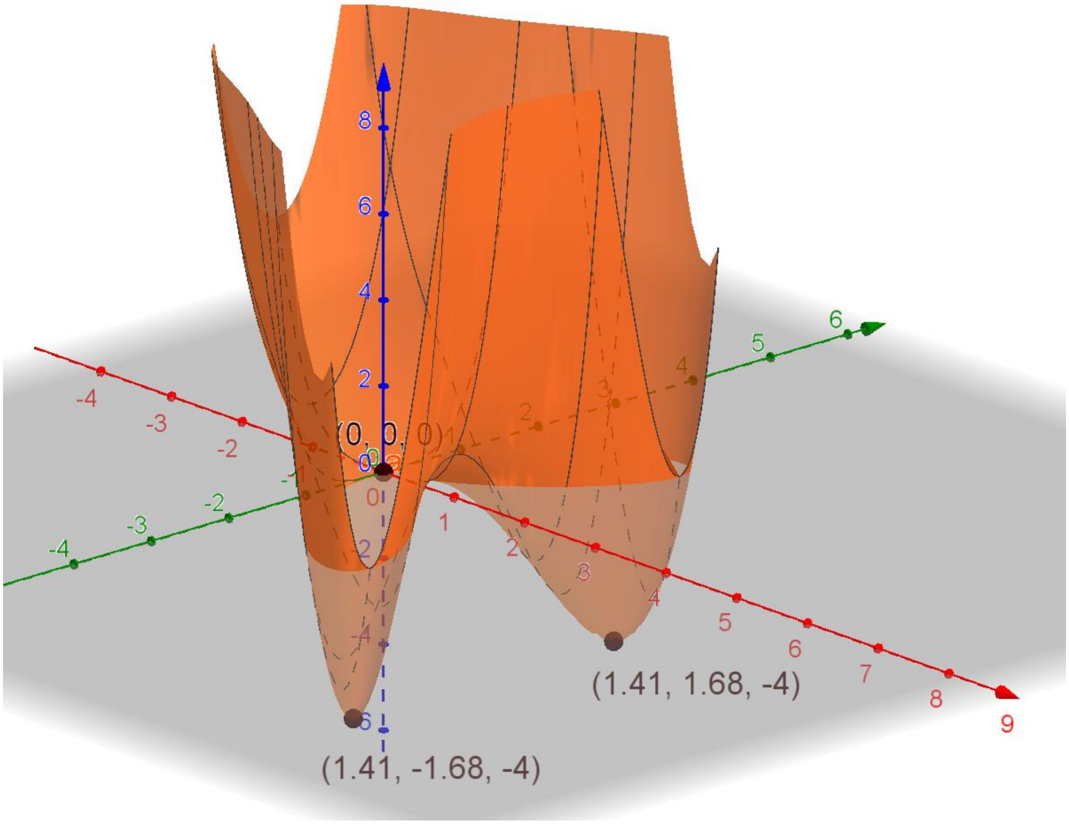
Kuva positiivisen z-akselin suunnasta, josta näkyy määrittelyalue $(x, y) \in \left[-\frac{3}{2}, 2\right] \times \left[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$.



Kriittiset pisteet:

On pädettävä, että gradientti $\nabla f = 0$. Katso myös kuva.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4x^3 - 4y^2 = 0 \\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4y^3 - 8xy = 0 \end{cases} \overset{\text{laskin}}{\Rightarrow} \begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ (x,y) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt[4]{8}\right) \\ (x,y) = \left(\sqrt{2}, \sqrt[4]{8}\right) \end{cases}$$



Kriittisten pisteiden laatu:

Determinantiksi saadaan

$$\Delta_2 f(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 & -8y \\ -8y & 12y^2 - 8x \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 96x^3 - 64y^2$$

(i) joten pisteessä $(x,y) = (0,0)$:

$$\Delta_2 f(x,y) = 144 \cdot 0^2 \cdot 0^2 - 96 \cdot 0^3 - 64 \cdot 0^2 = 0$$

(ei voi tehdä johtopäätöksiä kriittisen pisteen laadusta seurauslauseen perusteella…)

Kun funktion f lausekkeeseen $x^4 + y^4 - 4xy^2$ sijoitetaan pisteitä $(x,y) \neq (0,0)$ läheltä origoa (eli ollaan ns. epsilon-säteisellä origokeskisellä ympyrällä), niin termit x^4 ja y^4 ovat "lähellä nollaa" ja näin ollen lausekkeen $x^4 + y^4 - 4xy^2$ arvo määräytyy termin $-4xy^2$ perusteella, missä tulon tekijä $y^2 > 0$ aina. Näin ollen kun x saa positiivisia arvoja, niin lauseke $x^4 + y^4 - 4xy^2$ saa negatiivisia arvoja ja kun x saa negatiivisia arvoja, niin lauseke $x^4 + y^4 - 4xy^2$ saa positiivisia arvoja. Tosin x-akselilla tilanne määräytyy $y^4 > 0$ termin perusteella.

Siis, piste $(0,0)$ on satulapiste.

(ii) joten pisteessä $(x, y) = \left(\sqrt{2}, -\sqrt[4]{8}\right)$:

$$\Delta_2 f(x, y) = 144 \cdot \sqrt{2}^2 \cdot \left(-\sqrt[4]{8}\right)^2 - 96 \cdot \sqrt{2}^3 - 64 \cdot \left(-\sqrt[4]{8}\right)^2 = 256 \cdot \sqrt{2} > 0$$

lisäksi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 = 12 \cdot \sqrt{2}^2 = 24 > 0$$

Siis, piste $\left(\sqrt{2}, -\sqrt[4]{8}\right)$ on lokaali minimipiste.

(iii) joten pisteessä $(x, y) = \left(\sqrt{2}, \sqrt[4]{8}\right)$:

$$\Delta_2 f(x, y) = 144 \cdot \sqrt{2}^2 \cdot \left(\sqrt[4]{8}\right)^2 - 96 \cdot \sqrt{2}^3 - 64 \cdot \left(\sqrt[4]{8}\right)^2 = 256 \cdot \sqrt{2} > 0$$

lisäksi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 = 12 \cdot \sqrt{2}^2 = 24 > 0$$

Siis, piste $\left(\sqrt{2}, \sqrt[4]{8}\right)$ on lokaali minimipiste.

/12
/48