Matematiikan kurssikoe, Maa9 – Integraalilaskenta – RATKAISUT **Sievin lukio**
Torstai 11.4.2019
VASTAA MOLEMPIIN A-OSAN TEHTÄVIIN JA VALITSE 3 TEHTÄVÄÄ B-OSASTA.
Suositeltu aikakäyttö A-osaan noin 1h 15min.
Aineistot-osiossa myös pintojen piirto-ohjeita Geogebraan. Taulukkotiedot myös aineistossa.

A-osa / Del A

1. MONIVALINTA - Vain yksi vaihtoehto on oikein! (12p)

1.1 Laske/määritä integraali

$$\int (2x - t)\, dt\,.$$

- $x^2 - tx + C$
- $2x - \frac{1}{2}t^2 + C$
- $x^2 t - \frac{1}{2}t^2 + C$
- $x^2 - \frac{1}{2}t^2 x + C$
- $2xt - \frac{1}{2}t^2 + C$

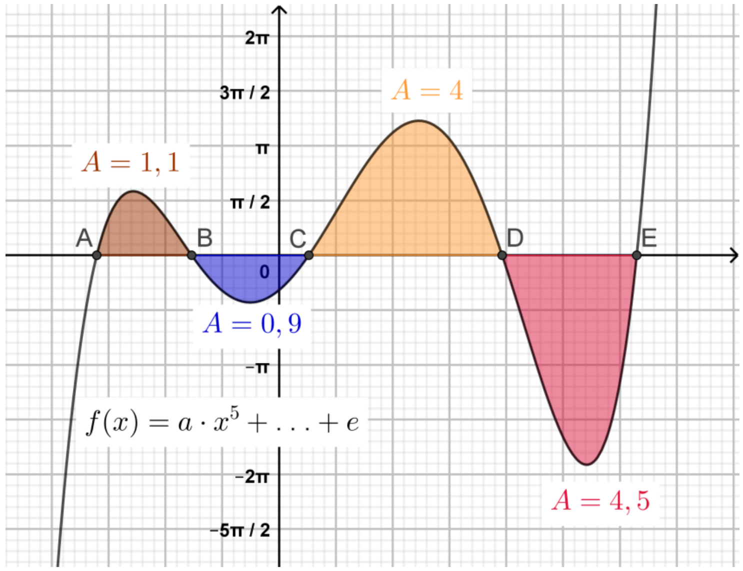
1.2 Laske/määritä

$$\int_{-1}^{1} (s^2 - s)\, ds\,.$$

- $\frac{2}{3}$
- $-\frac{2}{3}$
- $-\frac{1}{6}$
- $\frac{1}{6}$
- 0

1.3 Määritä alla olevan kuvan tiedoilla (B_x ja E_x ovat kyseisten pisteiden x-koordinaatteja)

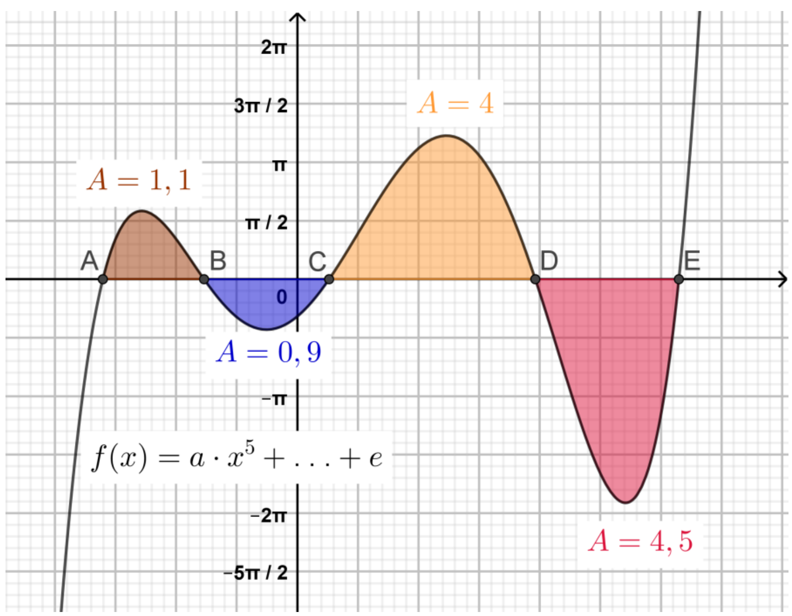
$$\int_{B_x}^{E_x} f(x)\, dx\,.$$



8,5	−1,4	10,5
−0,5	9,4	−0,3

1.4 Määritä alla olevan kuvan tiedoilla (A_x ja E_x ovat kyseisten pisteiden x-koordinaatteja)

$$\int_{A_x}^{E_x} |f(x)|\, dx\,.$$



8,5	1,4	10,5
−0,5	9,4	−0,3

1.5 Mihin perusideaan nojautuu käyrän kaaren, mielivaltaisten pinta-alojen ja tilavuuksien tarkka määrittäminen?

- Äärettömään summaan, arvoltaan äärettömän pienistä summattavista termeistä, joita sanotaan integrointialkioiksi.
- Siihen, että mielivaltainen integrointivakio voidaan "unohtaa".
- Osittaisintegrointimenetelmään.
- Siihen, että vaikeasti integroitavia funktioita voidaan arvioida polynomifunktioilla.

1.6 Mikä väittämä ***ei ole totta*** integraalifunktiolle

$$F: F(x) = \int f(x)\,dx\,.$$

- Integraalifunktio F on aina jatkuva funktion f määrittelyvälillään.
- Integraalifunktiolle F pätee: $F' = f$ funktion f määrittelyvälillään.
- Integraalifunktiolle F pätee: $F(x) = G(x) + C$, missä $G(x) = \int f(x)\,dx$.
- Integraalifunktiolle F pätee: $\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = F(x) + C$.

1.7 Mikä seuraavista on funktion

$$f(x) = \sin(2x)$$

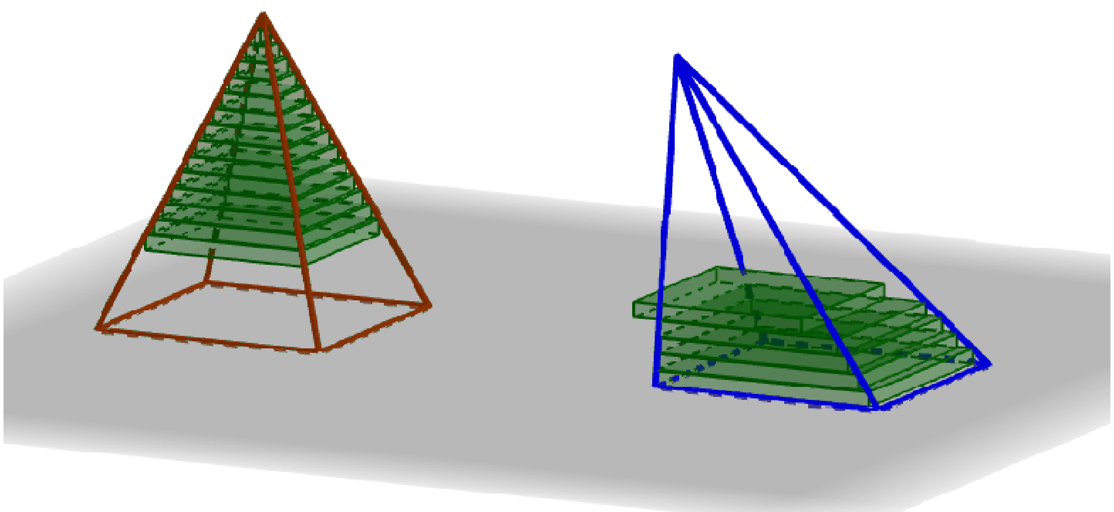
integraalifunktio?

- $$F: F(x) = -\cos(x^2)$$
- $$G: G(x) = -\cos(2x)$$
- $$H: H(x) = \sin(x) \cdot \cos(x)$$
- $$I: I(x) = \sin^2(x) + 2$$

1.8 Analyysin peruslause on

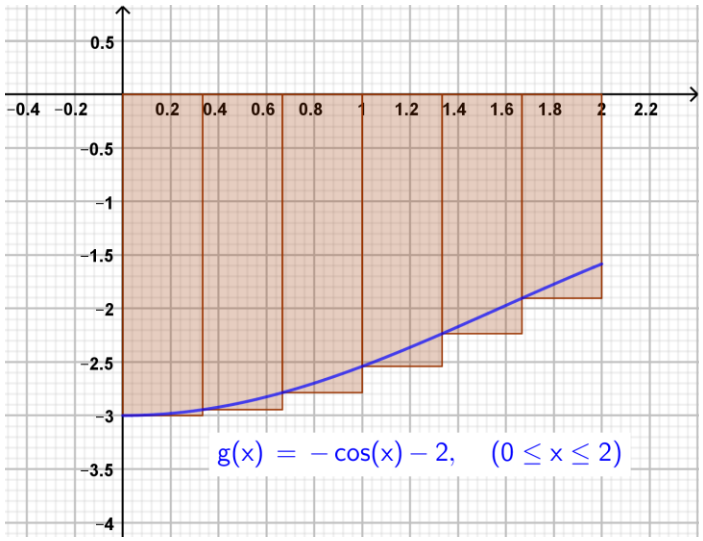
- $$\int_a^b f(x)\,dx = f(b) - f(a)$$
- $$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$
- $$\int_a^b f'(x)\,dx = f'(b) - f'(a)$$
- $$\int_a^b F(x)\,dx = f(b) - f(a), \qquad \text{kun } F' = f$$

1.9 Kuvassa perusteltu tilavuuksien yhtäläisyys perustuu



- Gaussin normaalijakaumaan.
- Osittaisintegrointikaavaan.
- Cavaljerin periaatteeseen.
- Lipsitchin jatkuvuuteen.

1.10 Annettu porraskuvio vastaa Riemannin...

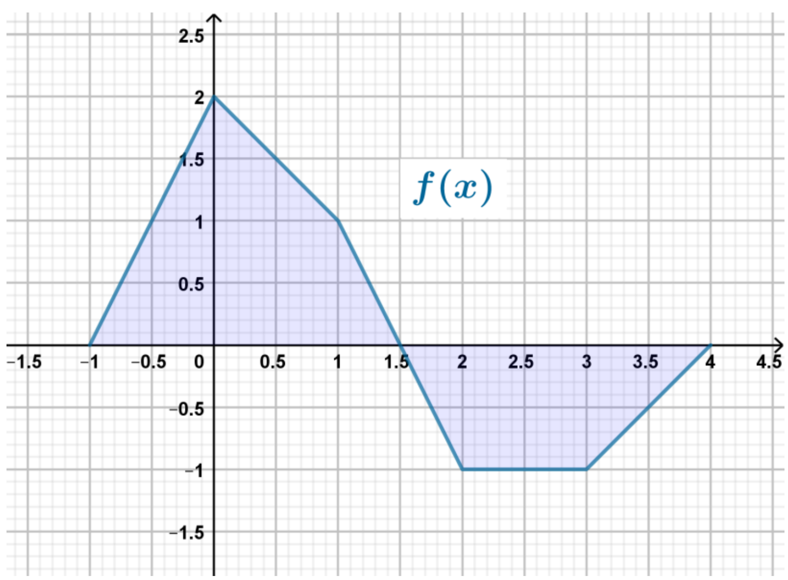


- yläsummaa.
- alasummaa.
- välisummaa.
- keskiarvosummaa.

1.11 Määritä kuvan avulla määrätyn integraalin

$$\int_{1}^{4} (f(x) - 1)\, dx$$

arvo.



- $\frac{3}{2}$
- $-\frac{9}{2}$
- 1
- -4
- $-\frac{5}{2}$

1.12 Olkoon $- < c < b = a$ ja funktio $f \neq 0$, eli nollafunktiosta eroava, pariton funktio. Siis kaikilla x pätee $f(x) = -f(-x)$. Mikä seuraavista vaihtoehdoista on oikein? (Hieman vaikeahko...yritä täydentää/ supistaa annettuja vaihtoehtoja sopivasti.)

- ○ $$\int_c^b f(x)\,dx = -\int_{-a}^c f(x)\,dx$$
- ○ $$\int_{-a}^b f(x)\,dx = 2 \cdot \int_0^b f(x)\,dx$$
- ○ $$\int_b^{-a} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$
- ○ $$\int_{-a}^b f(x)\,dx = \int_{-a}^c f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx$$

2. a) Miksi välillä $]0,2[$ käyrien (katso kuva alla)

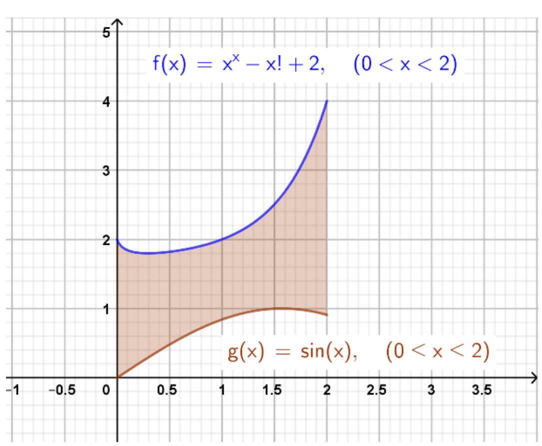
$$\boldsymbol{y = f(x) = x^x - x! + 2} \qquad\qquad \boldsymbol{y = g(x) = \sin(x)}$$

väliin jäävän alueen pyörähtäessä x-akselin ympäri muodostuvan kappaleen tilavuutta ei voi laskea kaavalla

$$\boldsymbol{V = \pi \cdot \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)^2\,dx\,,}$$

vaikka käyrien väliin jäävän alueen pinta-ala saadaan kaavalla

$$\boldsymbol{A = \int_0^2 \big(f(x) - g(x)\big)\,dx\,.}$$



b) Määritä/Laske

$$\int \frac{3x}{x-1}\,dx\,.$$

Vihje: Käytä ensin integrointisääntöä

$$\int k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int f(x)\,dx$$

ja sitten huijaa (sääntöjen mukaan).

c) TEE JOMPIKUMPI, EI MOLEMPIA!

i) Osittaisintegroi ja sievennä

$$\int \ln(x)\,dx, \qquad x > 0\,.$$

ii) Määritä/Laske

$$\int (e^x + 1)^2\,dx\,.$$

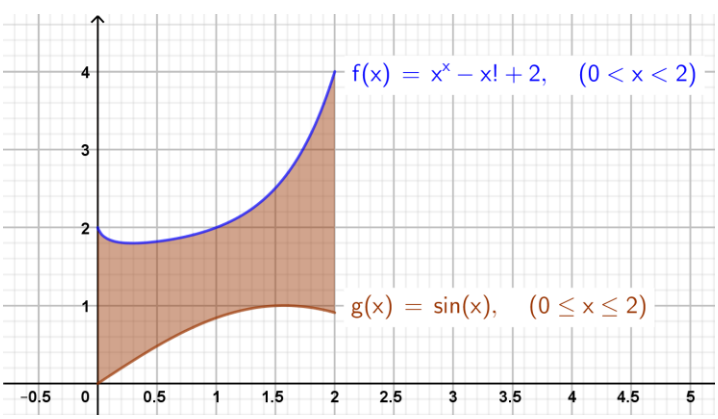
a) Mikäli laskee pyörähdyskappaleen annetun kaavan avulla, niin ns. välitermi

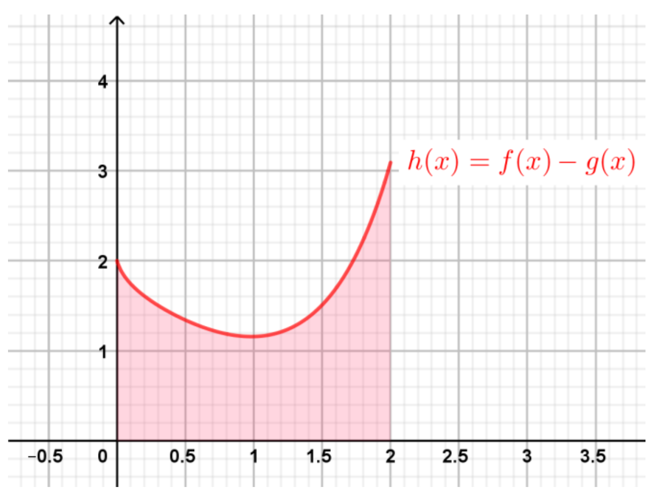
$$\big(f(x) - g(x)\big)^2 = \big(f(x)\big)^2 - 2 \cdot f(x) \cdot g(x) + \big(g(x)\big)^2$$

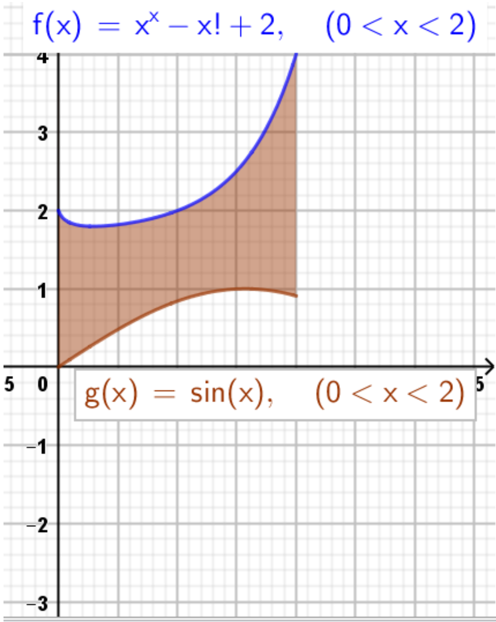
tekee virhettä. Huomaa, että funktio

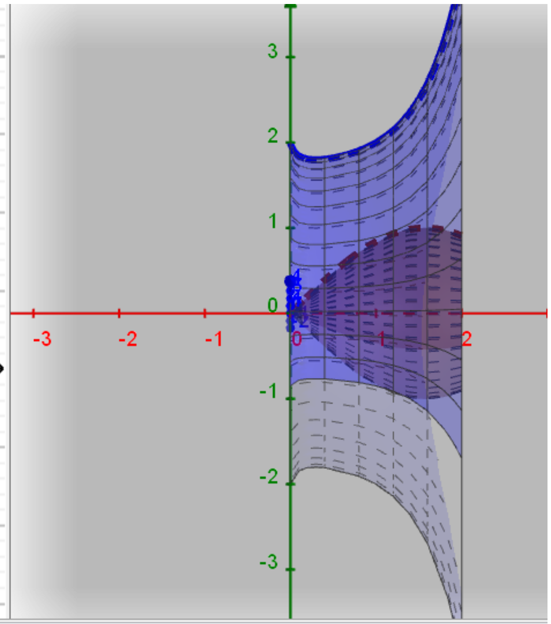
$$h\colon h(x) = f(x) - g(x)$$

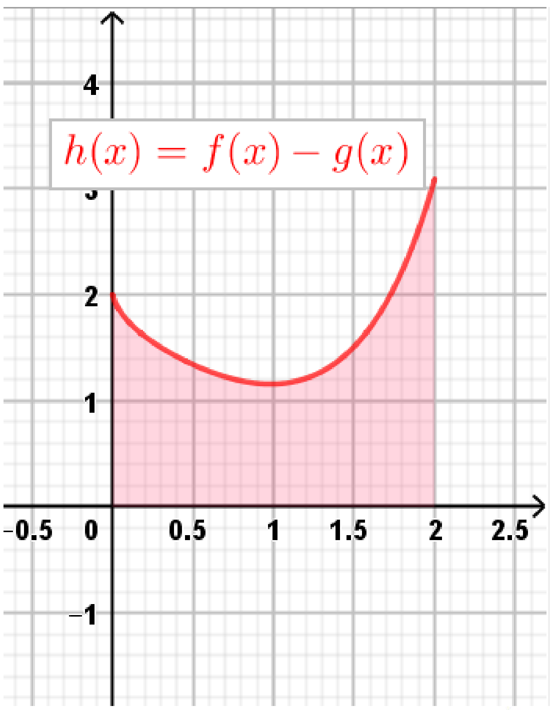
antaa funktioiden f ja g kuvaajien välisen etäisyyden koska molemmat saavat välillä $]0{,}2[$ positiivisia arvoja. Katso myös kuvat.

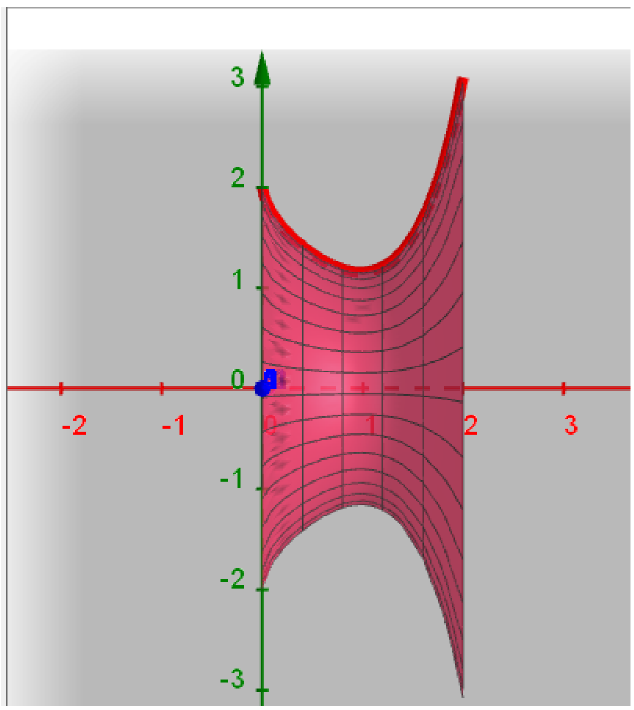


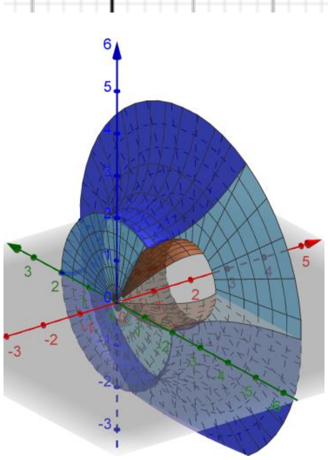


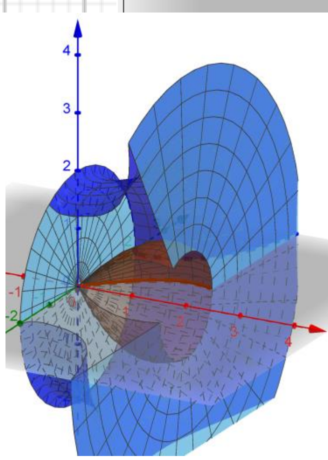

$f(x) = x^x - x! + 2, \quad (0 < x < 2)$
$g(x) = \sin(x), \quad (0 < x < 2)$

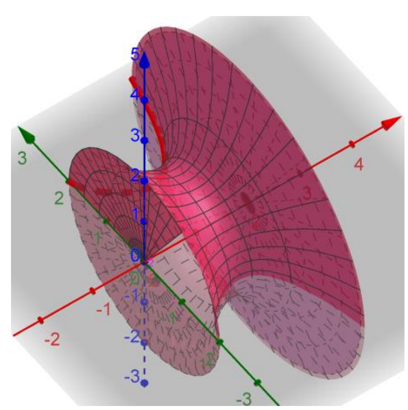



$h(x) = f(x) - g(x)$









b) Saadaan

$$\int \frac{3x}{x-1}\,dx = 3\cdot\int \frac{x}{x-1}\,dx = 3\cdot\int \frac{x-1+1}{x-1}\,dx = 3\cdot\int \left(\frac{x-1}{x-1}+\frac{1}{x-1}\right)dx$$

$$= 3\cdot\int \left(1+\frac{1}{x-1}\right)dx = 3\cdot\left(x+\ln(x-1)\right)+C$$

c) i) Saadaan

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{1}_{g'}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{=f}\,dx \overset{\text{OS.INT}}{=} x\cdot\ln(x) - \int \underbrace{x}_{g}\cdot\underbrace{\frac{1}{x}}_{=f}\,dx$$

$$= x\cdot\ln(x) - \int 1\,dx = x\cdot\ln(x) - x + C$$

ii) Saadaan

$$\int (e^x+1)^2\,dx = \int \left((e^x)^2+2e^x+1^2\right)dx = \frac{1}{2}\int 2e^{2x}\,dx + 2\int e^x\,dx + \int 1\,dx$$

$$= \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x + C\,.$$

B-osa / Del B

3. a) Millä vakion $\boldsymbol{a}$ arvolla suorien $\boldsymbol{x = a}$, ja $\boldsymbol{x = a + 2}$ sekä käyrän $\boldsymbol{y = (x^2 + x + 1)^{-1}}$ rajoittaman alueen pinta-ala on suurin? Voit hyödyntää tulosta

$$\boldsymbol{A(p) = \int_p^{p+2} f(x)\,dx = F(p+2) - F(p)}$$

$$\boldsymbol{\Longrightarrow \qquad DA(p) = A'(p) = f(p+2) - f(p)}$$

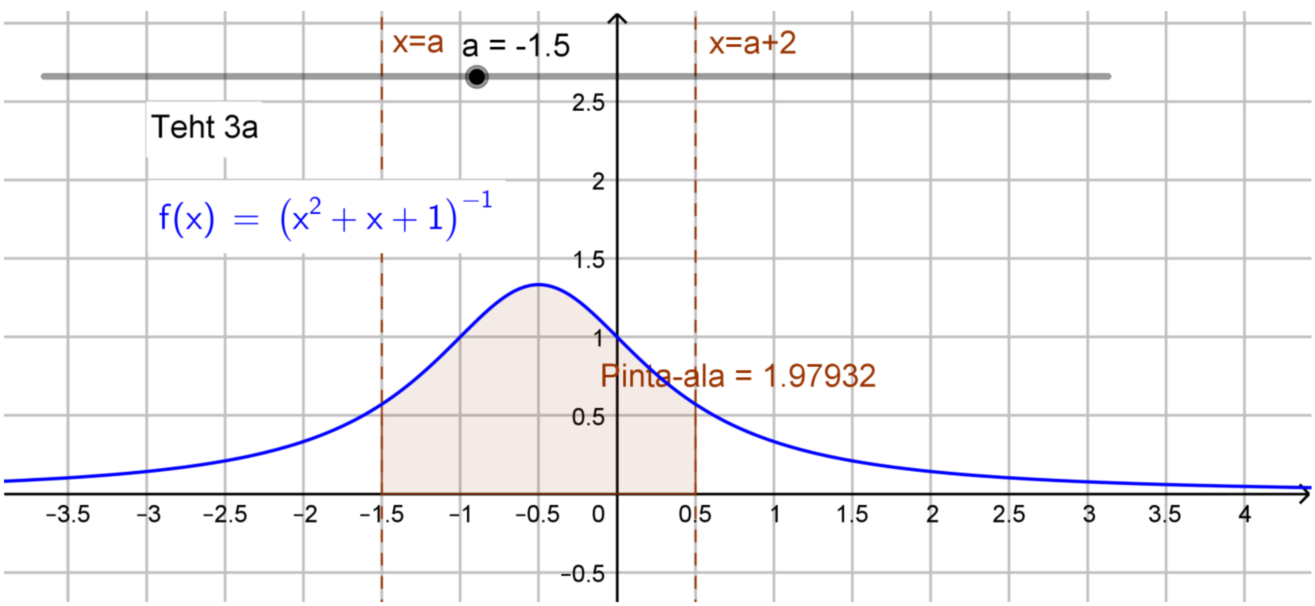
ja aineistot-osiosta löytyvää *tehtava3a.ggb*-tiedostoa. Vastauksesta pitää löytyä idea, määrätty integraali ja perustelut lopputulokselle. Kone sieventää lopputuloksen. Liitä kuva tilanteesta ratkaisuusi.

b) Käyrät

$$\boldsymbol{y_1 = 2x^2 - x^3 \qquad y_2 = 2x - x^2}$$

muodostavat koordinaatiston ensimmäiseen neljännekseen kaksi silmukkaa. Osoita, että näiden silmukoiden pinta-alat ovat yhtäsuuret. Nyt saa=pitää käyttää ohjelmistoja.

a) Määritetään pinta-alafunktio, derivoidaan se ja etsitään maksimi. Piirretään aluksi kuva käyrästä ja mallinnetaan alue, joka voisi vastata kysyttyä aluetta.



Nyt integroitavan alueen alarajana on muuttuja a ja ylärajana $a + 2$. Siis pinta-ala on

$$A = A(a) = \int_a^{a+2} \frac{1}{x^2 + x + 1}\,dx = F(a+2) - F(a)\,.$$

Derivoidaan tämä ja etsitään maksimi. Hyödynnetään derivoinnin ja integroinnin käänteisyyttä.

$$\Rightarrow \quad A'(a) = D\left(\int_a^{a+2} \frac{1}{x^2+x+1}\,dx\right) = \frac{1}{(a+2)^2+(a+2)+1} - \frac{1}{a^2+a+1}$$

$$= \frac{1}{a^2+4a+4+(a+2)+1} - \frac{1}{a^2+a+1}$$

$$= \frac{1}{a^2+5a+7} - \frac{1}{a^2+a+1} = \frac{a^2+a+1-a^2-5a-7}{a^4+6a^3+13a^2+12a+7}$$

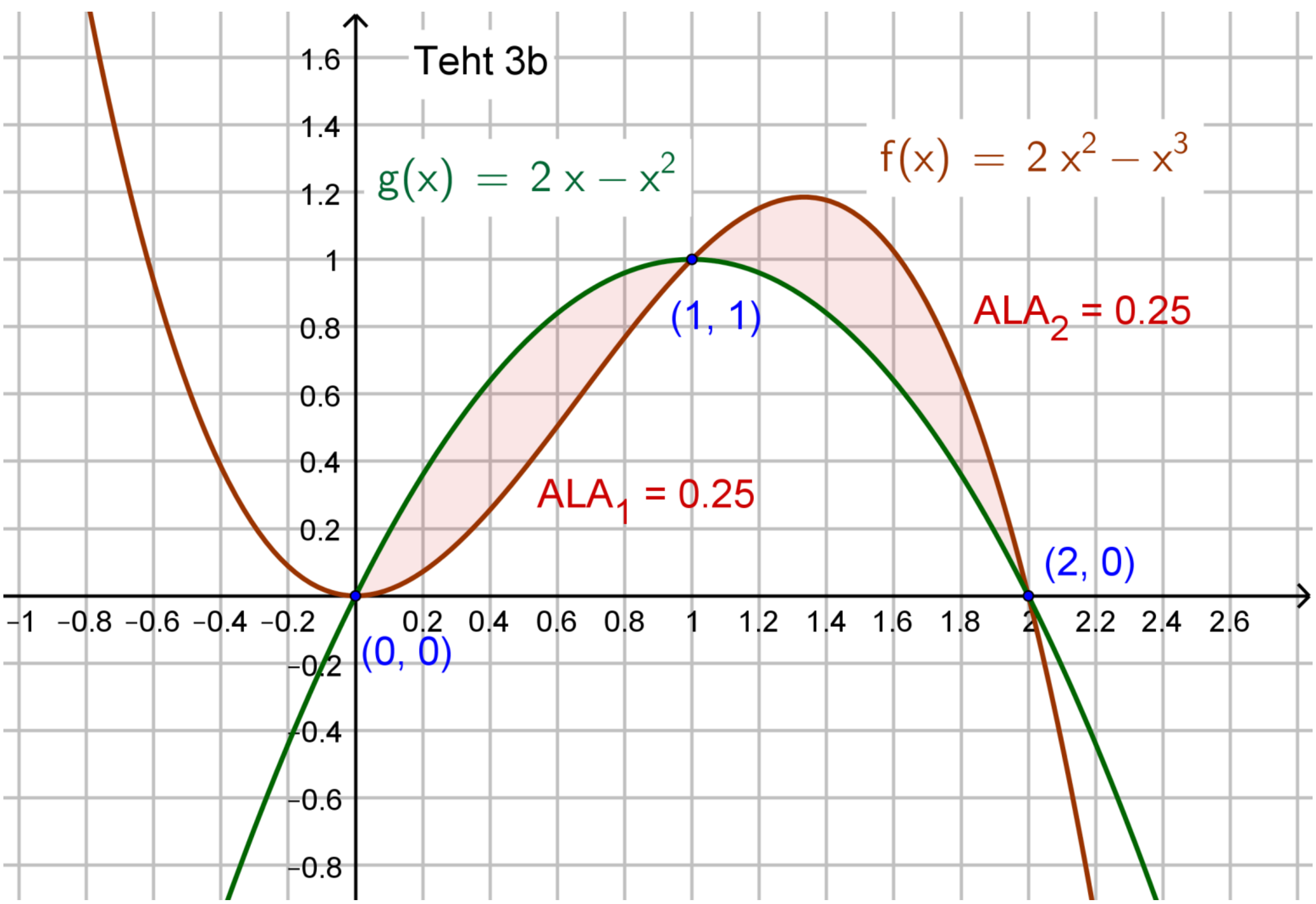
$$= \frac{-4a-6}{a^4+6a^3+13a^2+12a+7}$$

Koska nimittäjässä oleva lauseke ei saa aina positiivisia arvoja (laskin → kuvaaja tai muu perustelu), niin riittää tutkia osoittajaa. Siis, milloin lauseke $-4a-6=0$? Silloin kun $a=-\frac{3}{2}$. Tällöin pinta-alafunktio $A=A(a)$ saavuttaa maksimin → merkki- ja kulkukaavio, alla.

$-\frac{3}{2}$

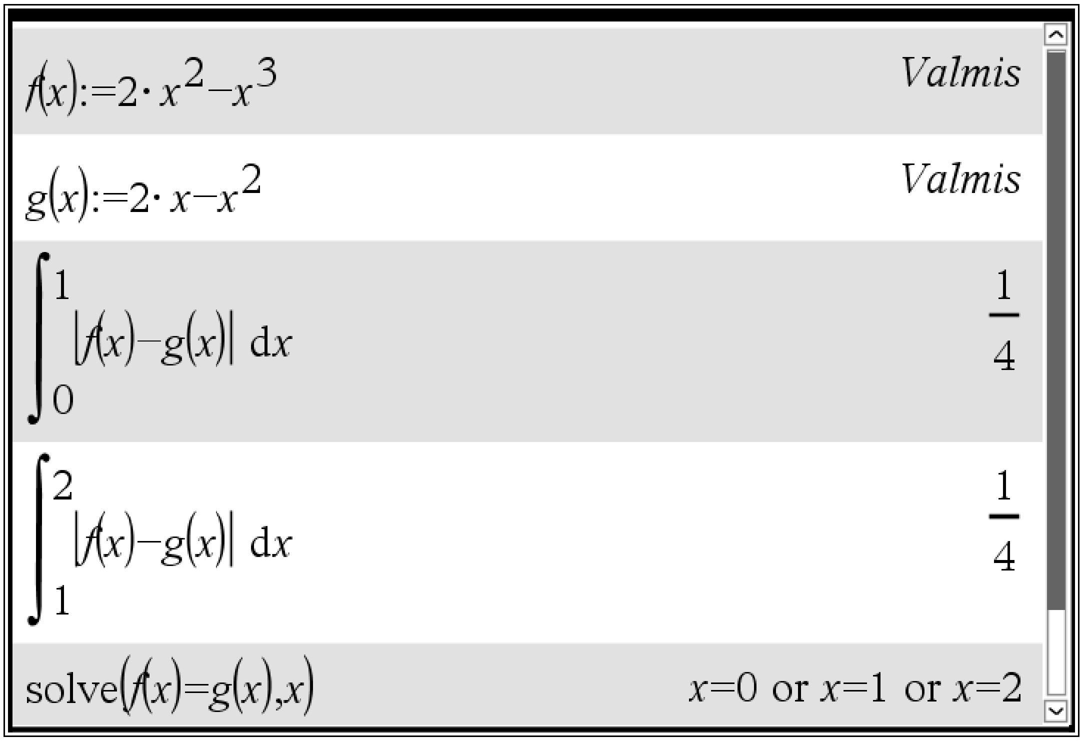
A'	$+$	$-$
A	↗	↘

b) Geogebralla

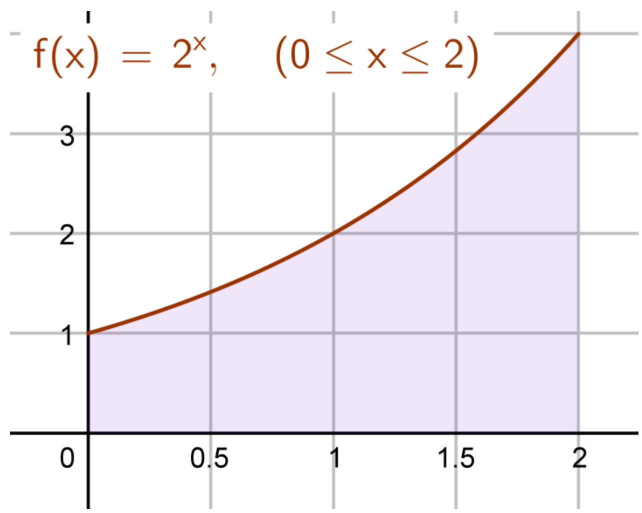


TAI

TI-ohjelmalla (pitää osata joko käyttää itseisarvoa tai päätellä kumpi on yläpuolinen ja kumpi alapuolinen funktion ko. välillä.) Funktioiden koodaus, integroinnit ja rajat olisi hyvä olla näkyvillä.



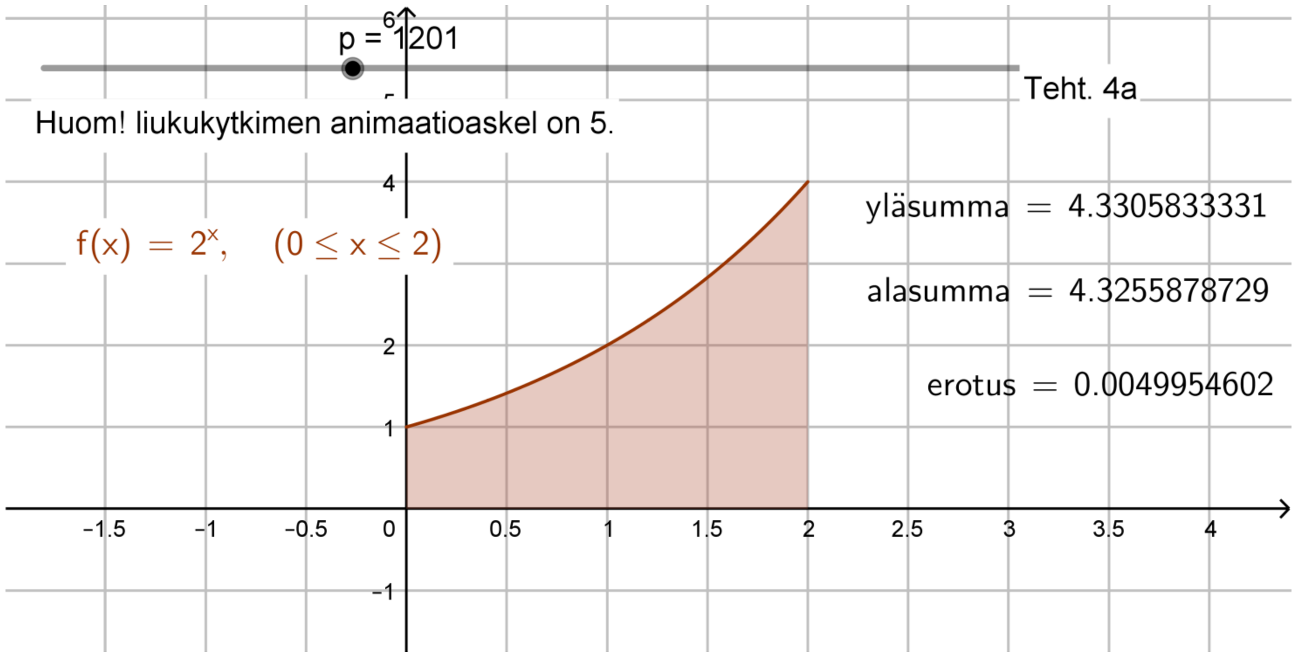
4. a) Tasoaluetta rajaavat käyrä $y = f(x) = 2^x$ molemmat akselit sekä suora $x = 2$, kuva oikealla. Kuinka moneen yhtäsuureen osaan väli $[0,2]$ on jaettava, jotta ylä- ja alasummat poikkeavat toisistaan vähemmän kuin $0,005$:n verran? Hyödynnä aineistot-osion *tehtävä4a.ggb*-tiedostoa ja etsi ensin ohjelman tuottama karkea likiarvo (liitä näyttökuva ratkaisuusi) ja laske sitten perustellen tarkka arvo. Pisteytys: ohjelmasta katsottu likiarvo ⟶ 1p, perustelut 5p.



b) Ratkaise yhtälö välivaiheineen (eli sijoitukset ja laskut pitää olla näkyvillä).

$$\int_0^k \frac{dx}{(2x+1)^2}\,dx = 0,4\,.$$

a) Liukukytkimestä saadaan $n > 1200$.



Koska funktio f on aidosti kasvava, niin ylä- ja alasummien erotukseksi saadaan

$$S_n - s_n = \underbrace{[f(2) - f(0)]}_{\text{korkeus}} \cdot \underbrace{\frac{2-0}{n}}_{\text{leveys}} = [4-1] \cdot \frac{2}{n} = \frac{6}{n},$$

kun väli $[0,2]$ on jaettu n:ään yhtä suureen osaan. Tulee siis päteä

$$\frac{6}{n} < 0{,}005\,,$$

josta saadaan $n > 1200$.

Vastaus Väli on jaettava vähintään 1201:een yhtä suureen osaan.

b) Integrointi antaa

$$\int_0^k \frac{dx}{(2x+1)^2} = \int_0^k (2x+1)^{-2}dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^k 2(2x+1)^{-2}dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Big/_0^k -(2x+1)^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2 \cdot k + 1}\right) - \left(\frac{1}{2 \cdot 0 + 1}\right)\right] = -\frac{1}{4k+2} + \frac{1}{2}$$

joten yhtälö

$$\int_0^k \frac{dx}{(2x+1)^2}dx = 0{,}4$$

tulee muotoon

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4k+2} = \frac{2}{5}\,, \qquad \text{kun } k \neq \frac{1}{2}.$$

Sievennetään

$$\frac{2k+1}{4k+2} - \frac{1}{4k+2} = \frac{2}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2k+1-1}{4k+2} = \frac{2}{5} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{2k}{4k+2} = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \qquad 10k = 8k + 4, \qquad \text{kun } k \neq \frac{1}{2}$$

$$\Longrightarrow \qquad 2k = 4 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 2$$

Ja kun $k = \frac{1}{2}$, niin lausekkeen $\frac{1}{2} - \frac{1}{4k+2}$ arvoksi tulee

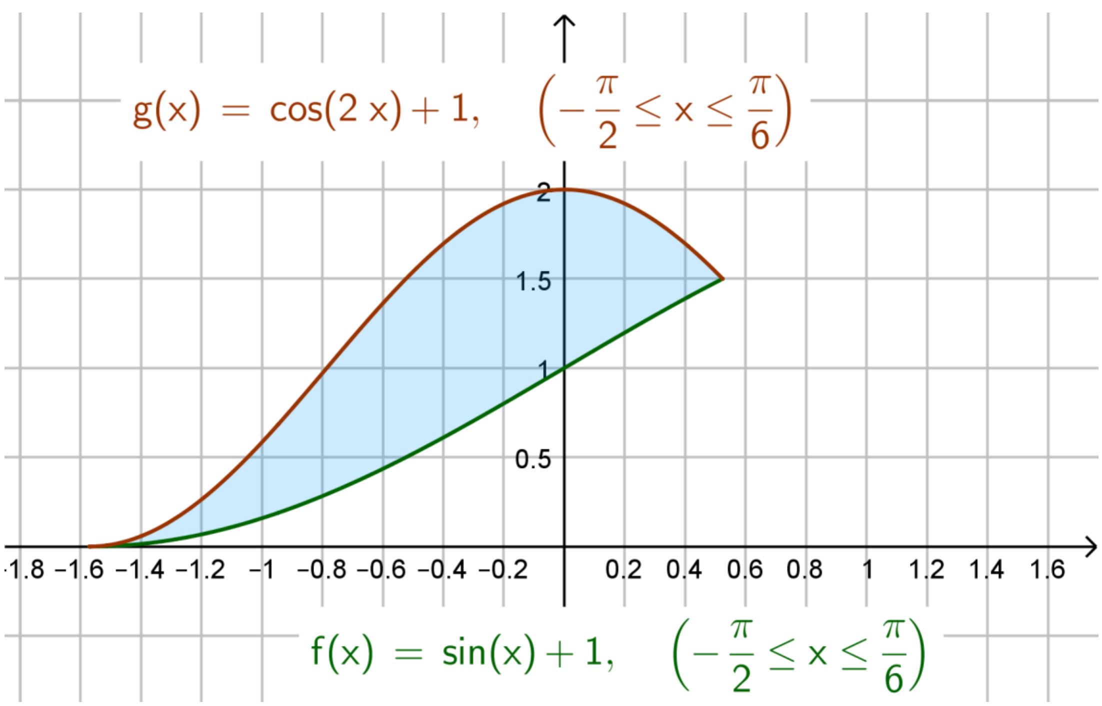
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{2} + 2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4} \neq \frac{2}{5},$$

joten ei ratkaisua.

5. **a) Käyrän $y = \sin(x) + 1$ ja suoran $y = \cos(2x) + 1$, väliin välillä $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ jäävä alue pyörähtää x-akselin ympäri. Määritä kappaleen tilavuus. Vastauksesta tulee löytyä: se tasoalue, joka pyörähtää ja tilavuutta vastaava määrätty integraali sekä sijoitukset ylä- ja alarajoilta. Kone saa kuitenkin integroida. 3D-kuvasta + 1piste. Huom! Geogebralla saa pyörähtävän alueen kivasti piirrettyä. (5p+1p)**

b) Käyrän $y = e^x$ ja suoran $y = c$, missä $c > \frac{1}{e}$, välillä $[-1, 1]$ rajoittama kaksiosainen alue pyörähtää suoran $y = c$ ympäri. Miten tulisi vakio c valita, jotta syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus olisi mahdollisimman pieni? Integrointi riittää tehdä laskinohjelmilla, mutta lauseke tai integraali pitää olla esillä sekä muut perustelut. Hyödynnä ohjelmistoja! (7p)

a) Piirretään tasoalue geogebralla



Integroidaan annetut käyrät (koneella, jos käsin niin ensin purkaa binomin neliön ja sitten hyödyntää MAOL-La):

$$\int (\cos(2x) + 1)^2 \, dx = \frac{1}{4}\sin(2x)\cos(2x) + \sin(2x) + \frac{3}{2}x + C$$

$$\int (\sin(x) + 1)^2 dx = -\frac{1}{2}\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x) + \frac{3}{2}x + C$$

Kun tämä tasoalue pyörähtää x-akselin ympäri, niin tilavuudeksi saadaan

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \pi \cdot (\cos(2x) + 1)^2 \, dx - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \pi \cdot (\sin(x) + 1)^2 \, dx$$

$$= \pi \cdot \left(\pi + \frac{9\sqrt{3}}{16}\right) - \pi \cdot \left(\pi - \frac{9\sqrt{3}}{8}\right) = \pi \cdot \frac{27\sqrt{3}}{16} \approx 9{,}182\ 359$$

$$\int (\sin(x)+1)^2 \, \mathrm{d}x \qquad \left(\frac{-\sin(x)}{2} - 2\right) \cdot \cos(x) + \frac{3 \cdot x}{2}$$

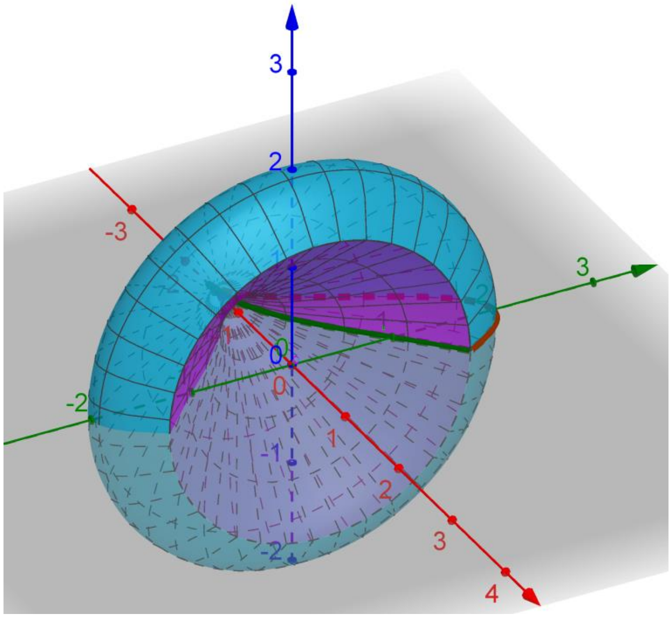
$$\int (\cos(2 \cdot x)+1)^2 \, \mathrm{d}x \qquad \frac{\sin(2 \cdot x) \cdot \cos(2 \cdot x)}{4} + \sin(2 \cdot x) + \frac{3 \cdot x}{2}$$

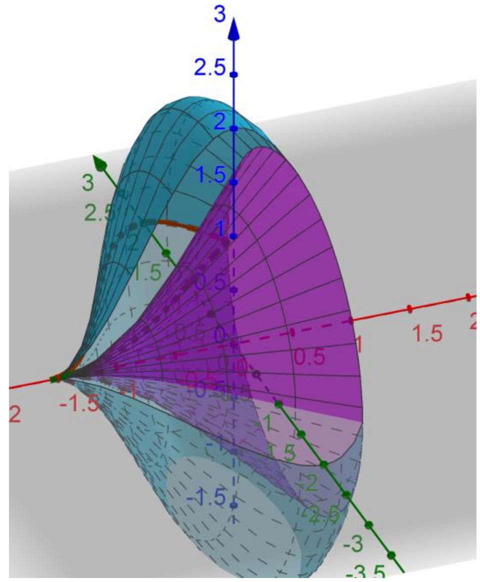
$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos(2 \cdot x)+1)^2 \, \mathrm{d}x \qquad \pi + \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{16}$$

$$\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin(x)+1)^2 \, \mathrm{d}x \qquad \pi - \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{8}$$

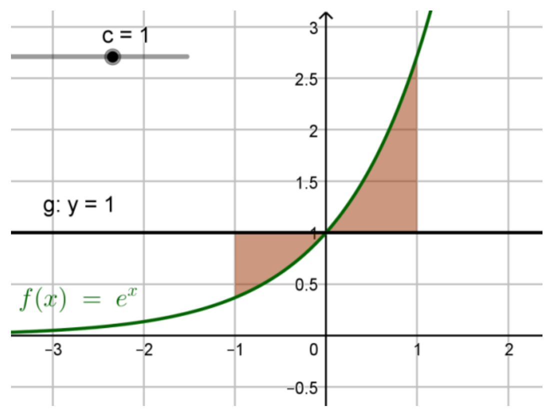
$$\pi \cdot \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos(2 \cdot x)+1)^2 \, \mathrm{d}x - \pi \cdot \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} (\sin(x)+1)^2 \, \mathrm{d}x \qquad \frac{27 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{16}$$

Ja 3D-kuvan saa aineistot-osiota hyödyntäen.





b) Nyt siis vakio $c > \frac{1}{e}$ ja **lisäksi pyörähdys tapahtuu x-akselin suuntaisen suoran $y = c$ suhteen**. Integrointiväli on selvä ja nyt kannattaa käyttää itseisarvoa eli funktiota $h\colon h(x) = |e^x - c|$. Näin ollen tilavuusfunktio muuttujan c suhteen on



$$V\colon V(c) = \int_{-1}^{1} \pi \cdot |e^x - c|^2 \, dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (e^x - c)^2 \, dx = \pi \cdot \int_{-1}^{1} (e^{2x} - 2ce^x + c^2) \, dx$$

$$= \pi \cdot \int_{-1}^{1} (e^{2x} - 2ce^x + c^2) \, dx = \pi \cdot \mathop{/}_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot e^{2x} - 2ce^x + c^2 x$$

$$\underbrace{= \ \dots \ =}_{\text{laskin}} \pi \left(2c^2 + \left(\frac{2}{e} - 2e \right) c + \frac{1}{2} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \right)$$

Tämä saatu lauseke normaalisti derivoidaan ja etsitään derivaatan nollakohta jne. Saadaan

$$V'(c) = \pi \left(4c + \frac{2}{e} - 2e \right)$$

Millä c:n arvolla $V'(c) = 0$?

$$\Rightarrow \quad c = \frac{2e - \frac{2}{e}}{4} = \ \dots \ = \frac{e^2 - 1}{2e}$$

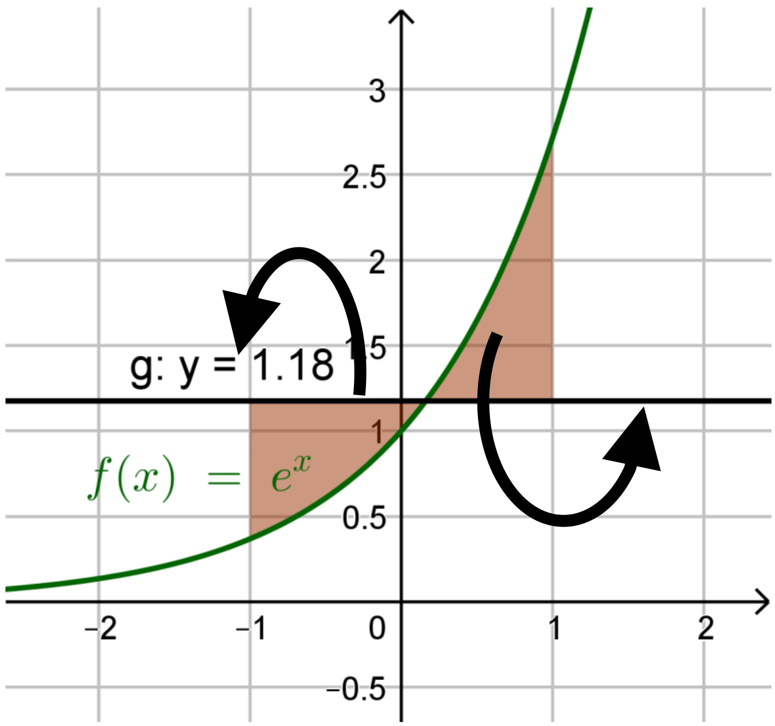
Edelleen joko merkkikaavio tai testiarvot. Lasketaan testiarvot:

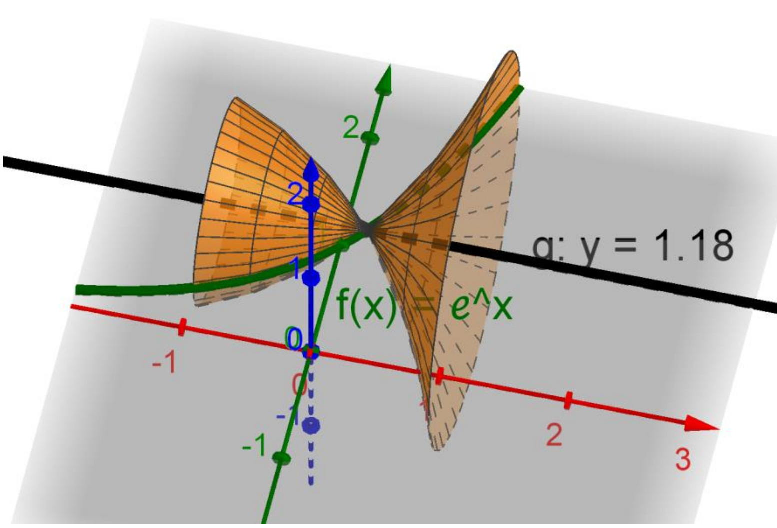
$$V'\left(\frac{e-1}{2e}\right) = \cdots = 2 - 2e \approx -3{,}43 \quad \text{ja} \quad V'\left(\frac{e^3-1}{2e}\right) = \cdots = 2e^2 - 2e \approx 9{,}34$$

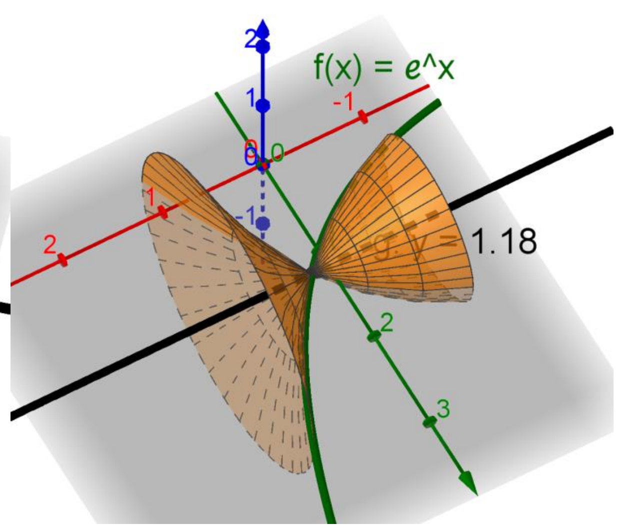
Näin ollen vakion c arvolla $c = \frac{e^2-1}{2e} = \sinh(1) \approx 1{,}175$ saavuttaa tilavuusfunktio V minimiarvon,

$$V_{\min} = (e^2 - 1) \cdot e^{-2} \cdot \pi = 2{,}716\,424\ldots.$$

Katso kuvat (ei vaadita) alla.



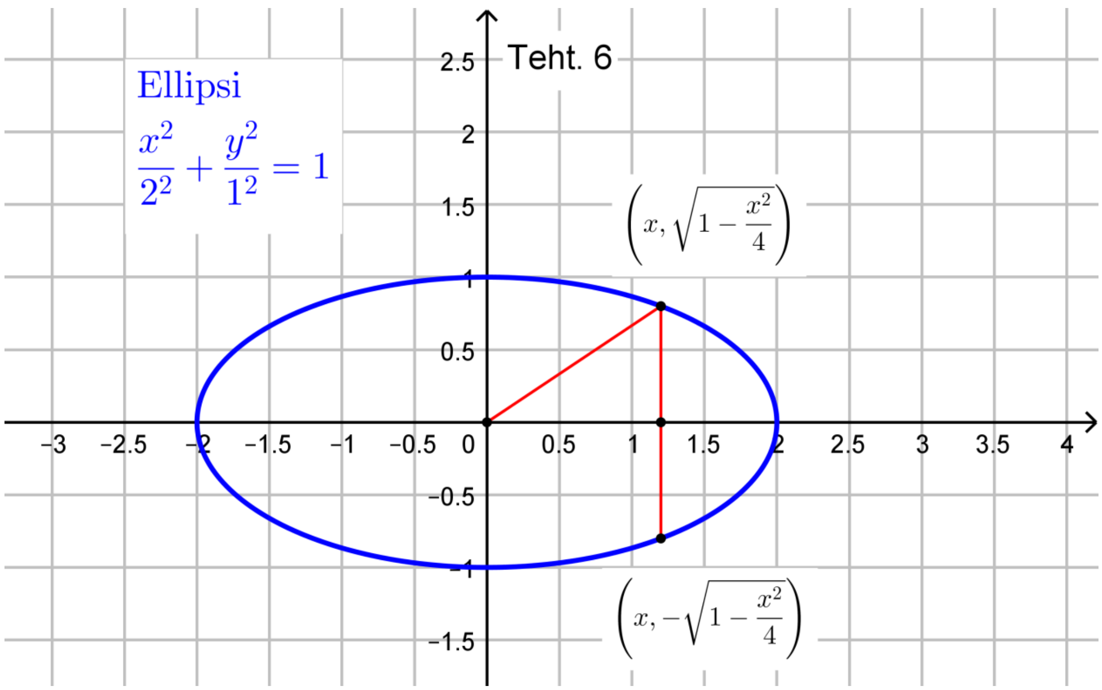




6. Kappaleen pohja on ellipsi, jonka pikkuakselin pituus $2b = 2$ ja isoakselin pituus $2a = 4$. Kun kappaletta leikataan isoakselia vastaan kohtisuorilla tasoilla, ovat leikkauskuviot suorakaiteita, joiden korkeus on kaksinkertainen leveyteen nähden. Määritä kappaleen tilavuus perustellen.

Huom! MAOLsta löytyy tietoa ellipsistä.

Piirretään tilanteesta kuva, ellipsin puoliakselit ovat siis $a = 2$ ja $b = 1$. Voidaan valita (ja kannattaakin) x-akseli isoakselin suuntaiseksi.



Integrointiväliksi tulee siis $[-2,2]$ ja kohdassa $x \in [-2,2]$, x-akselia vastaan kohtisuoran leikkaussuorakaiteen pohjan leveys on (katso kuva yllä)

$$2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\ .$$

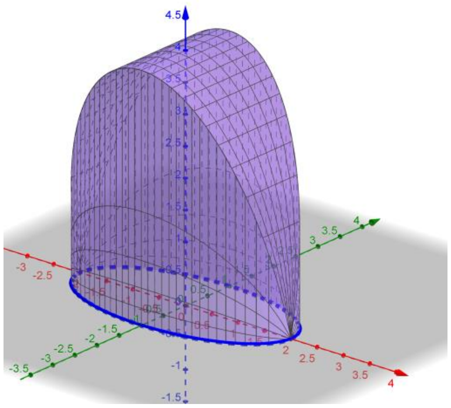
Näin ollen kohdassa $x \in [-2,2]$ poikkipinta-alaksi saadaan

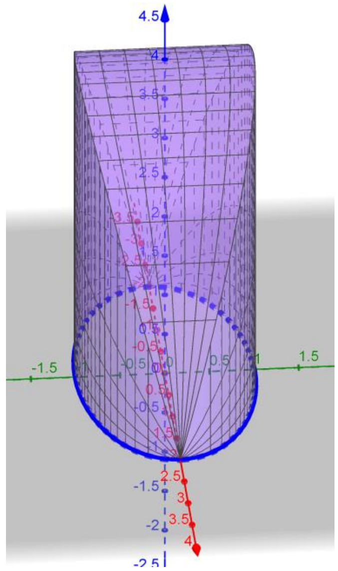
$$A(x) = \text{kanta} \cdot \text{korkeus} = \left(2 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right)\left(4 \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\right) = 8\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 8 - 2x^2$$

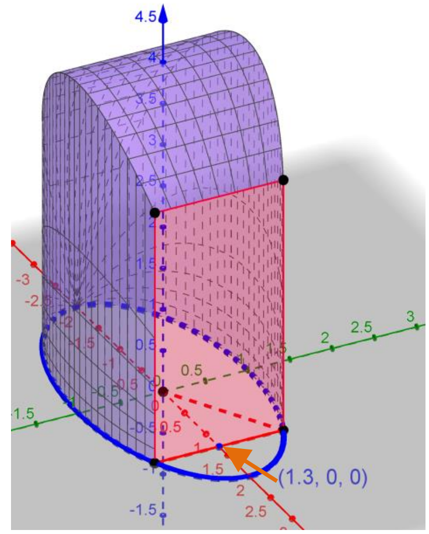
tilavuudeksi tulee

$$V: V(x) = \int_{-2}^{2} dV = \int_{-2}^{2} A(x)\, dx = \int_{-2}^{2} (8 - 2x^2)\, dx = \ \dots = \frac{64}{3} \approx 21{,}3\ .$$

Viimeisessä kuvassa on poikkileikkaus tehty kohdassa $x = 1{,}3$.







7. a) Millä vakion a arvoilla on

$$\left|\int_0^3 (a^2 \cdot t^2 + a)\,dt\right| = 0{,}2\,.$$

Ohje: Pura itseisarvot ensin. Etsi sitten likiarvot aineistot-osion *tehtava7a.ggb*-tiedostoa käyttäen (saat = kannattaa hieman lisätä komentoja tuloksen saamiseksi). Muodosta ja laske sitten algebrallisesti tarkat arvot (ohjelmistoja hyödyntäen). Määrätty integraali, josta lukuarvon otat, pitää olla vastauksessa näkyvissä mutta ei tarvitse tehdä sijoituksia ala- ja ylärajoilta, vastaus riittää.

b) Määritä se funktion

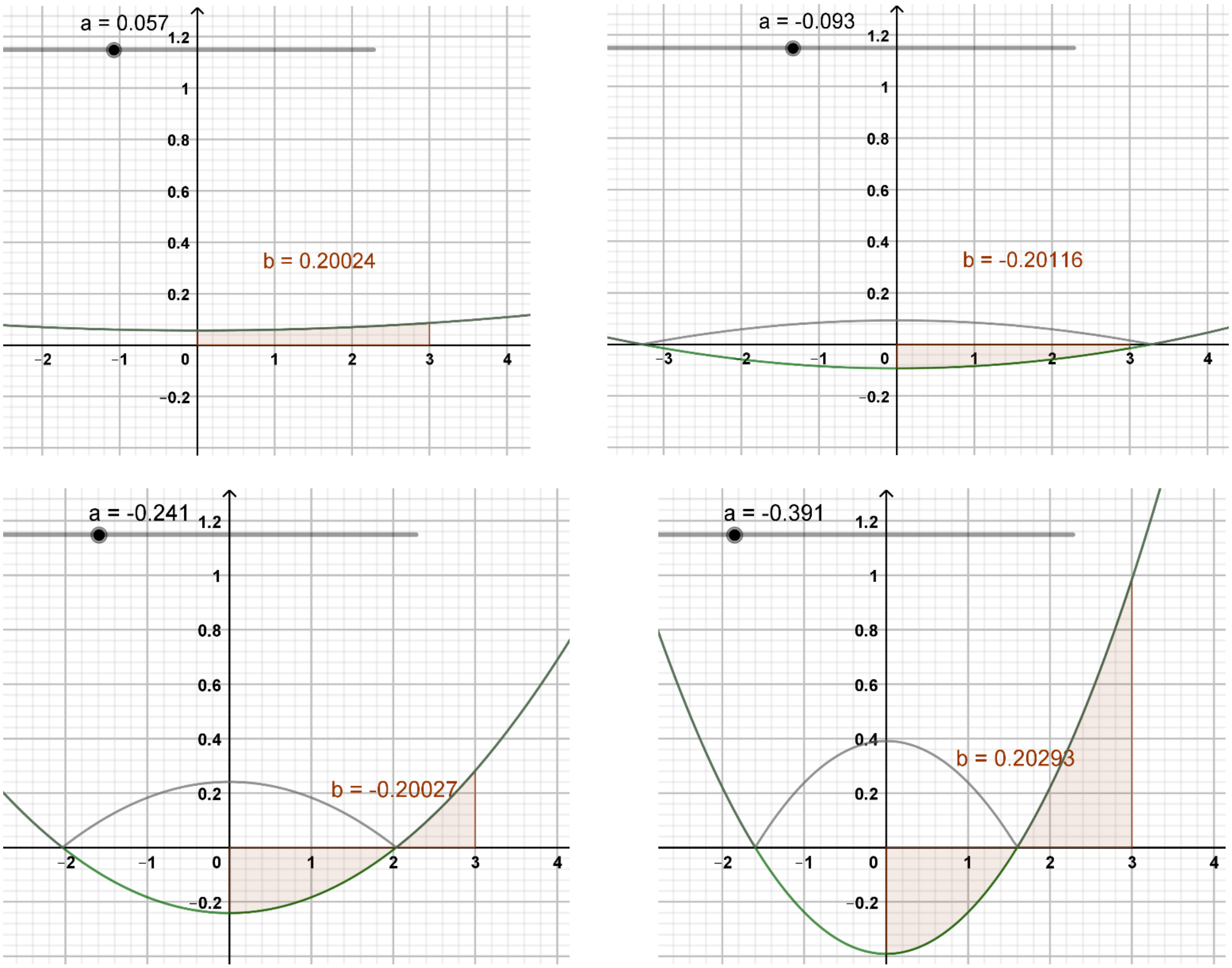
$$f\colon f(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & \text{kun } x \leq 1 \\ x - 3, & \text{kun } 1 < x \end{cases}$$

integraalifunktio F, joka leikkaa x-akselin kohdassa -3. Laske $F(7)$. Hyödynnä ohjelmistoja. Voit halutessasi liittää ratkaisuusi mukaan kuvia.

a) Itseisarvot purettuna saadaan kaksi yhtälöä

$$\int_0^3 (a^2 \cdot t^2 + a)\,dt = 0{,}2 \quad \text{ja} \quad \int_0^3 (a^2 \cdot t^2 + a)\,dt = -0{,}2\,.$$

Geogebran liukukytkintä käyttäen saadaan neljä eri ratkaisua: $a \approx 0{,}057$, $a \approx -0{,}093$, $a \approx -0{,}241$ ja $a \approx -0{,}391$. (Hyväksytään $\pm 0{,}002$ heitot.)



Muodostetut integraalit ovat jo yllä, joten laskinohjelmistoja hyödyntäen saadaan:

$$\text{solve}\left(\left|\int_0^3 \left(a^2 \cdot t^2 + a\right) \mathrm{d}t\right| = 0.2, a\right)$$

$$a = \frac{-(3\cdot\sqrt{5}+5)}{30} \text{ or } a = \frac{-(\sqrt{5}+5)}{30} \text{ or } a = \frac{\sqrt{5}-5}{30} \text{ or } a = \frac{3\cdot\sqrt{5}-5}{30}$$

$$\text{solve}\left(\int_0^3 \left(a^2 \cdot t^2 + a\right) \mathrm{d}t = 0.2, a = 0.05\right)$$

$$a = 0.056940131083$$

$$\text{solve}\left(\int_0^3 \left(a^2 \cdot t^2 + a\right) dt = {}^-0.2, a = {}^-0.09\right) \qquad a = {}^-0.092131067417$$

$$\text{solve}\left(\int_0^3 \left(a^2 \cdot t^2 + a\right) dt = {}^-0.2, a = {}^-0.24\right) \qquad a = {}^-0.241202265917$$

$$\text{solve}\left(\int_0^3 \left(a^2 \cdot t^2 + a\right) dt = 0.2, a = {}^-0.39\right) \qquad a = {}^-0.390273464417$$

b) Koska

$$\lim_{x \to 1-} (-x^2 - x) = -2 = \lim_{x \to 1+} (x - 3) \qquad \text{ja} \qquad f(1) = -1^2 - 1 = -2\,,$$

niin funktio f on jatkuva myös kohdassa $x = 1$ ja siten integraalifunktio F on olemassa.

Näin ollen

$$F(x) = \begin{cases} \int (-x^2 - x)\, dx, & \text{kun } x \le 1 \\ \int (x - 3)\, dx, & \text{kun } 1 < 1 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_1, & \text{kun } x \le 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + C_2, & \text{kun } 1 < x \end{cases}.$$

Integraalifunktion on oltava jatkuva kaikkialla (koska se on määritelmän perusteella derivoituva), joten tarkastellaan F:n jatkuvuutta kohdassa $x = 1$. Täytyy siis olla

$$\lim_{x \to 1-} F(x) = \lim_{x \to 1+} F(x) = F(1)$$

eli

$$\lim_{x \to 1-} \left(-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_1\right) = \lim_{x \to 1+} \left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + C_2\right) = F(1)$$

$$-\frac{1}{3} \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot 1^2 + C_1 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + C_2$$

$$C_1 = C_2 - 2\frac{1}{2} + \frac{5}{6} = C_2 - \frac{5}{3}$$

Siis integraalifunktioksi tulee (nyt vain yksi integroimisvakio mukana!)

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_2 - \frac{5}{3}, & \text{kun } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + C_2, & \text{kun } 1 < x \end{cases}.$$

Vielä pitää etsiä se tietty integraalifunktio, joka kulkee pisteen $(-3,0)$ kautta. Toisin sanoen integraalifunktion arvo kohdassa $x = -3$ on 0, eli $F(-3) = 0$. Pitää valita oikea lauseke koska integraalifunktio on paloittain määritelty. Valitaan se lauseke ($x \leq 1$ tai $1 < x$), jolla $x = -3$ toteutuu, eli lauseke $-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + C_2 - \frac{5}{3}$, saadaan

$$F(-3) = -\frac{1}{3}(-3)^3 - \frac{1}{2}(-3)^2 + C_2 - \frac{5}{3} = 0$$

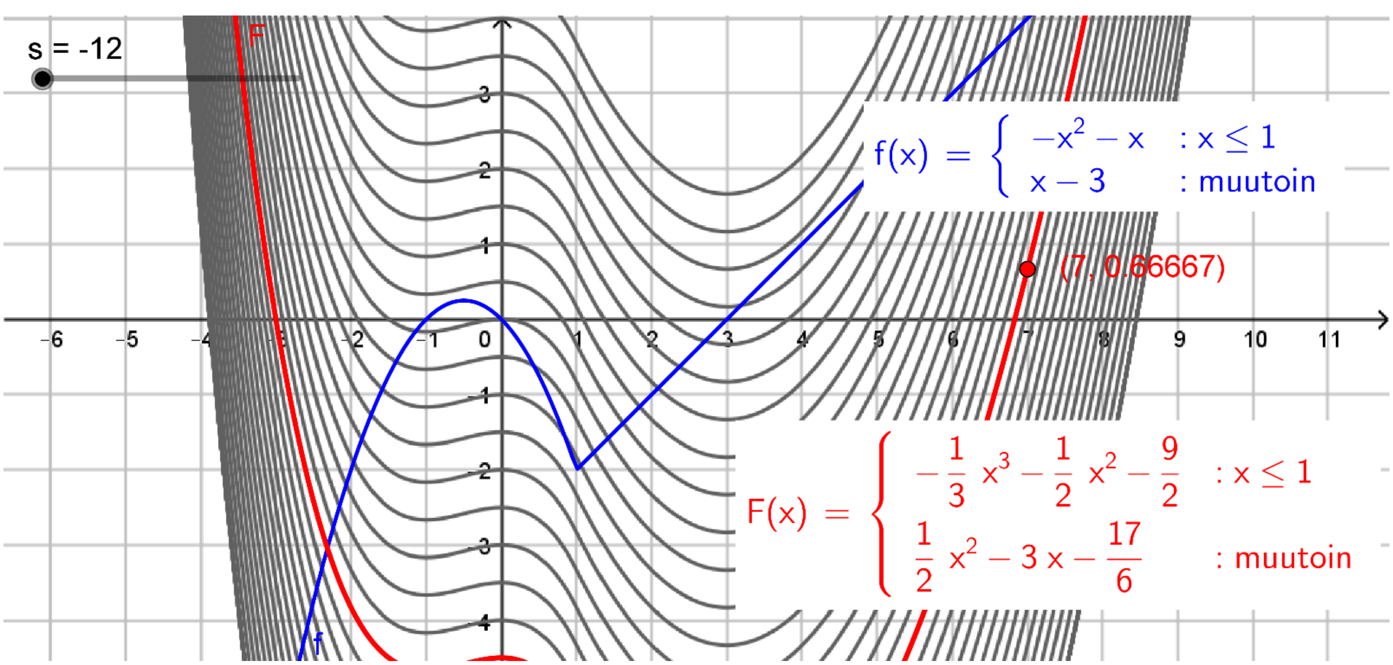
$$\Longrightarrow \qquad C_2 = -\frac{17}{6},$$

ja loppujen lopuksi kysytty integraalifunktio on (katso myös kuvat)

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}, & \text{kun } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{17}{6}, & \text{kun } 1 < x \end{cases}.$$

Kohdassa $x = 7$ saadaan

$$F(7) = \frac{1}{2} \cdot 7^2 - 3 \cdot 7 - \frac{17}{6} = \frac{2}{3}.$$



Yllä olevassa kuvassa sinisellä on piirretty funktio

$$f : f(x) = \begin{cases} -x^2 - x, & \text{kun } x \leq 1 \\ x - 3, & \text{kun } 1 < x \end{cases}$$

Kuvassa punaisella on piirretty funktio

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{9}{2}, & \text{kun } x \leq 1 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{17}{6}, & \text{kun } 1 < x \end{cases}$$

Harmaalla on piirretty integraalifunktioita F vakion C_2 eri arvoilla. Kuvassa on myös piste $P = (7, F(7))$.