

KERTAUS

- K1.**
- a) $150 \text{ cm} = 15 \text{ dm} = 1,5 \text{ m}$
 - b) $0,8 \text{ km} = 8 \text{ hm} = 80 \text{ dam} = 800 \text{ m}$
 - c) $12 \text{ m} = 120 \text{ dm} = 1200 \text{ cm}$
 - d) $1230 \text{ cm} = 123 \text{ dm} = 12,3 \text{ m} = 1,23 \text{ dam} = 0,123 \text{ hm} = 0,0123 \text{ km}$
 - e) $25 \text{ hm} = 250 \text{ dam} = 2\,500 \text{ m}$
 - f) $7\,600 \text{ mm} = 760 \text{ cm} = 76 \text{ dm}$
 - g) $3 \text{ m} = 0,3 \text{ dam} = 0,03 \text{ hm} = 0,003 \text{ km}$
 - h) $0,45 \text{ km} = 4,5 \text{ hm} = 45 \text{ dam} = 450 \text{ m} = 4500 \text{ dm}$
- K2.**
- a) $3 \text{ m}^2 = 300 \text{ dm}^2$
 - b) $94 \text{ cm}^2 = 0,94 \text{ dm}^2$
 - c) $2,3 \text{ m}^2 = 230 \text{ dm}^2 = 23\,000 \text{ cm}^2 = 2\,300\,000 \text{ mm}^2$
 - d) $379 \text{ mm}^2 = 3,79 \text{ cm}^2$
 - e) $2 \text{ ha} = 200 \text{ a} = 20\,000 \text{ m}^2$
 - f) $2,1 \text{ a} = 210 \text{ m}^2 = 21\,000 \text{ dm}^2$
 - g) $0,01 \text{ km}^2 = 1 \text{ hm}^2 = 100 \text{ dam}^2 = 10\,000 \text{ m}^2$
 - h) $5000 \text{ m}^2 = 50 \text{ a} = 0,5 \text{ ha}$

- K3.**
- a) $8,5 \text{ dm}^3 = 8500 \text{ cm}^3$
 - b) $980 \text{ mm}^3 = 0,98 \text{ cm}^3$
 - c) $0,5 \text{ m}^3 = 500 \text{ dm}^3$
 - d) $23\,800 \text{ cm}^3 = 23,8 \text{ dm}^3 = 0,0238 \text{ m}^3$
 - e) $200 \text{ mm}^3 = 0,2 \text{ cm}^3 = 0,0002 \text{ dm}^3$
 - f) $30\,000 \text{ m}^3 = 30 \text{ dam}^3 = 0,03 \text{ hm}^3 = 0,000\,03 \text{ km}^3$
 - g) $0,001 \text{ km}^3 = 1 \text{ hm}^3 = 1\,000 \text{ dam}^3 = 1\,000\,000 \text{ m}^3$
 $= 1\,000\,000\,000 \text{ dm}^3 = 1\,000\,000\,000\,000 \text{ cm}^3$
 - h) $0,0234 \text{ m}^3 = 23,4 \text{ dm}^3 = 23\,400 \text{ cm}^3 = 23\,400\,000 \text{ mm}^3$
- K4.**
- a) $35 \text{ dl} = 3,5 \text{ l}$
 - b) $6,0 \text{ l} = 60 \text{ dl} = 600 \text{ cl} = 6000 \text{ ml}$
 - c) $20 \text{ dl} = 200 \text{ cl} = 2000 \text{ ml}$
 - d) $33 \text{ cl} = 3,3 \text{ dl} = 0,33 \text{ l}$
 - e) $4,5 \text{ m}^3 = 4500 \text{ dm}^3 = 4500 \text{ l}$ ($1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$ (litra))
 - f) $1,6 \text{ dl} = 0,16 \text{ l} = 0,16 \text{ dm}^3$
 - g) $64 \text{ cm}^3 = 0,064 \text{ dm}^3 = 0,064 \text{ l} = 0,64 \text{ dl}$
TAI $64 \text{ cm}^3 = 64 \text{ ml} = 6,4 \text{ cl} = 0,64 \text{ dl}$ ($1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$)
 - h) $56\,000 \text{ ml} = 5\,600 \text{ cl} = 560 \text{ dl} = 56 \text{ l} = 56 \text{ dm}^3 = 0,056 \text{ m}^3$
TAI $56\,000 \text{ ml} = 56\,000 \text{ cm}^3 = 56 \text{ dm}^3 = 0,056 \text{ m}^3$

- K5.**
- a) $2,8 \text{ kg} = 28 \text{ dg} = 280 \text{ cg} = 2800 \text{ g}$
 - b) $2,3 \text{ hm} = 23 \text{ dam} = 230 \text{ m} = 2\,300 \text{ dm} = 23\,000 \text{ cm}$
 - c) $70 \text{ ml} = 7 \text{ cl} = 0,7 \text{ dl}$
 - d) $28 \text{ dl} = 2,8 \text{ l} = 2,8 \text{ dm}^3 = 0,0028 \text{ m}^3$
 - e) $0,428 \text{ m}^3 = 428 \text{ dm}^3 = 428\,000 \text{ cm}^3$
 - f) $21 \text{ cm}^3 = 0,021 \text{ dm}^3 = 0,021 \text{ l} = 21 \text{ ml}$ ($1 \text{ dm}^3 = 1 \text{ l}$ (litra))
TAI suoraan $21 \text{ cm}^3 = 21 \text{ ml}$, kun tiedetään, että $1 \text{ ml} = 1 \text{ cm}^3$.
 - g) $14 \text{ mg} = 1,4 \text{ cg} = 0,14 \text{ dg} = 0,014 \text{ g}$
 - h) $0,6 \text{ ha} = 60 \text{ a}$

- K6.** Nimettäessä kulma kolmen kirjaimen avulla kirjoitetaan ensin oikealla kyljellä oleva piste, sitten kärkipiste ja lopuksi vasemmalla kyljellä oleva piste. Siten $\alpha = \sphericalangle RPQ$ ja $\beta = \sphericalangle QPR$

Täysi kulma on 360° , joten $\beta = 360^\circ - 59^\circ = 301^\circ$.

Vastaus: $\alpha = \sphericalangle RPQ$ ja $\beta = \sphericalangle QPR = 301^\circ$

- K7.** a) Ristikulmat ovat yhtä suuret, joten $\alpha = 68^\circ$.

Vastaus: $\alpha = 68^\circ$

- b) Vieruskulmien summa on 180° , joten $\alpha = 180^\circ - 98^\circ = 82^\circ$.

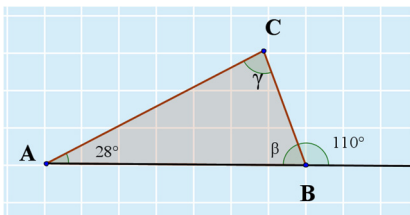
Vastaus: $\alpha = 82^\circ$

- c) Kulman α vieruskulma on samankohtainen 127° :n kulman kanssa. Koska suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset, ovat samankohtaiset kulmat yhtäsuuret. Kulman α vieruskulma on siis 127° . Siten kulma $\alpha = 180^\circ - 127^\circ = 53^\circ$.

Vastaus: $\alpha = 53^\circ$

K8. Piirretään mallikuva ja merkitään kysytyjä kulmia

$$\beta = \sphericalangle CBA \text{ ja } \gamma = \sphericalangle ACB.$$



Kulma β on 110° kulman vieruskulma, joten $\beta = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Kolmion kulmien summa on 180° , joten saadaan yhtälö

$$28^\circ + 70^\circ + \gamma = 180^\circ, \text{ josta}$$

$$\gamma = 180^\circ - 28^\circ - 70^\circ = 82^\circ$$

Vastaus: $\sphericalangle CBA = 70^\circ$ ja $\sphericalangle ACB = 82^\circ$

K9. Merkitään vieruskulmia $2x$ ja $3x$. Vieruskulmien summa on 180° , joten muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä tuntematon x .

$$2x + 3x = 180$$

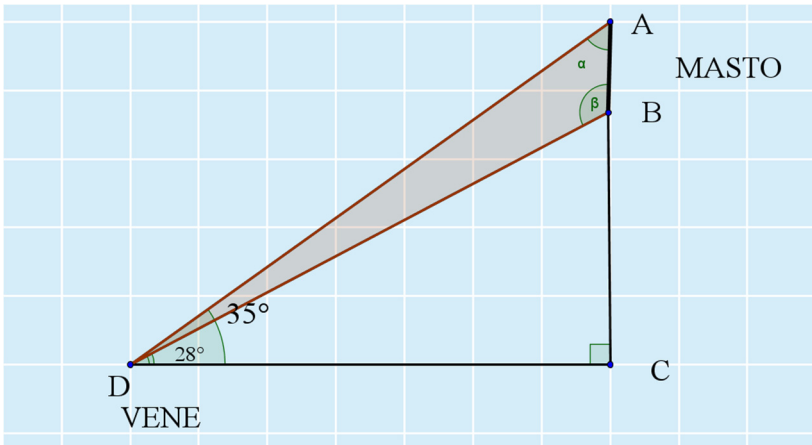
$$5x = 180 \quad || : 5$$

$$x = 36$$

Kulmat ovat $2x = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ$ ja $3x = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ$

Vastaus: 72° ja 108°

K10. Piirretään mallikuva.



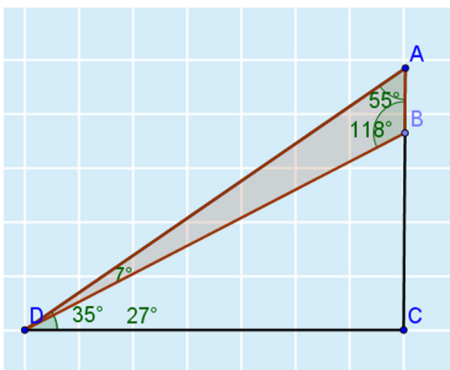
Tehtävässä kysytään kuvan värityn kolmion ADB kulmien suuruuksia.

Maston yläosaan muodostuva kulma α saadaan kolmion DCA kulmien summan avulla: $\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$.

Kolmion kärkeen D muodostuva kulma on $35^\circ - 28^\circ = 7^\circ$.

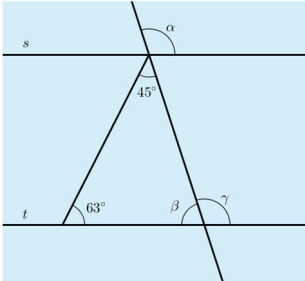
Kulman β suuruus saadaan värjätystä kolmiosta
 $\beta = 180^\circ - 55^\circ - 7^\circ = 118^\circ$.

Tarkistetaan piirtämällä ja mittaamalla.



Vastaus: 7° , 118° ja 55°

- K11.** Merkitään kuvaan kulman α samankohtainen kulma γ ja samankohtaisen kulman vieruskulma β .



Kolmion kulmien summa on 180° , joten kulma $\beta = 180^\circ - 63^\circ - 45^\circ = 72^\circ$.

Vieruskulmien summa on 180° , joten $\gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 72^\circ = 108^\circ$.

Koska suorat s ja t ovat yhdensuuntaiset, ovat samankohtaiset kulmat α ja γ yhtä suuret. Siten $\alpha = 108^\circ$.

Vastaus: $\alpha = 108^\circ$

- K12.** a) Kolmion 13° :n kulman vastaisen kateetin pituus on x ja hypotenuusan pituus on $5,85$ km. Ratkaistaan kateetin x pituus sinin avulla.

$$\sin 13^\circ = \frac{x}{5,85} \quad || \cdot 5,85$$

$$x = 5,85 \cdot \sin 13^\circ$$

$$x = 1,315\dots$$

$$x \approx 1,32$$

Vastaus: $x \approx 1,32$ km

- b) Kolmion 64° :n kulman viereisen kateetin pituus on 2,2 cm ja hypotenuusan pituus on x .

Ratkaistaan hypotenuusan y pituus kosinin avulla.

$$\begin{aligned}\cos 64^\circ &= \frac{2,2}{y} \quad || \cdot y \\ y \cdot \cos 64^\circ &= 2,2 \quad || : \cos 64^\circ \\ y &= \frac{2,2}{\cos 64^\circ} \\ y &= 5,018\dots \\ y &\approx 5,0\end{aligned}$$

Vastaus: $y \approx 5,0$ cm

- c) Kolmion kulmaa α viereisen kateetin pituus on 11,5 mm ja vastaisen kateetin pituus on 7,3 mm. Ratkaistaan kulman α pituus tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \frac{7,3 \text{ mm}}{11,5 \text{ mm}} \\ \alpha &= 32,406\dots^\circ \\ \alpha &\approx 32^\circ\end{aligned}$$

Kulman suuruus saadaan laskimen toiminnolla arctand, atan tai \tan^{-1} , esimerkiksi komennolla $\text{arctand}(7.3/11.5)$.

Vastaus: $\alpha \approx 32^\circ$

K13. Teräväkulmaisessa kolmiossa ovat kaikki kulmat alle 90° , joten kolmioon A sopii väite V.

Tylppäkulmaisessa kolmiossa on yksi kulma yli 90° , joten kolmioon B sopii väite III.

Suorakulmaisessa kolmiossa on yksi kulma 90° , joten kolmioon C sopii väite I.

Tasasivuisessa kolmiossa on kaikki kulmat yhtä suuria. Kolmion kulmien summa on 180° , joten kaikkien kulmien on oltava 60° . Täten kolmioon D sopii väite II.

Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuret. Jos myös huippukulma olisi yhtä suuri, olisi kolmio tällöin tasasivuinen. Kolmioon E sopii väite IV.

Vastaus: A:V, B:III, C:I, D:II ja E:IV

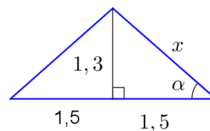
K14. Merkitään kylkeä kirjaimella x ja kantakulmaa kirjaimella α . Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Kylki x on suorakulmaisen kolmion hypotenuusa ja sen pituus saadaan Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 1,3^2 + 1,5^2$$

$$x^2 = 1,69 + 2,25$$

$$x^2 = 3,94$$

$$x = \pm\sqrt{3,94}$$



Ratkaisuksi käy vain positiivinen arvo.

$$x = 1,984\dots$$

$$x \approx 2,0$$

Kantakulma α saadaan esimerkiksi tangentin avulla:

$$\tan \alpha = \frac{1,3}{1,5}$$

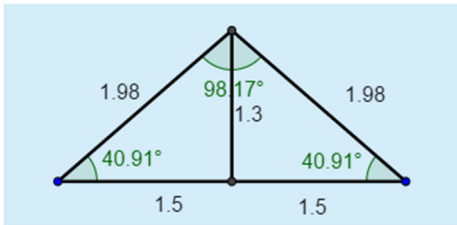
$$\alpha = 40,914\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 40,9^\circ$$

Tasakylkisen kolmion huippukulma saadaan vähennyslaskulla

$$180^\circ - 2 \cdot 40,914\dots^\circ = 98,171\dots^\circ \approx 98,2^\circ.$$

Tarkistetaan piirtämällä.



Vastaus: Kylkien pituus 2,0 m, kantakulmat $40,9^\circ$, huippukulma $98,2^\circ$

K15. Tutkitaan toteuttavatko kolmion sivujen pituudet ehdon $a^2 + b^2 = c^2$.

Kahden lyhimmän sivun neliöiden summa on $60^2 + 91^2 = 11\,881$.

Pisimmän sivun neliö on $109^2 = 11\,881$.

Koska ehto $a^2 + b^2 = c^2$ toteutuu, kolmio on suorakulmainen.

Vastaus: on

K16. Kolmion kulmien summa on 180° .

Jos kantakulmien summa on 56° , niin huippukulma on $180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$.

Kantakulmat ovat yhtä suuret, joten ne ovat molemmat tällöin $56^\circ : 2 = 28^\circ$.

Jos kantakulman ja huippukulman summa on 56° , niin toinen kantakulma olisi $180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$. Tällöin kantakulmat eivät ole yhtä suuret, koska toinen kantakulma olisi 124° ja toinen olisi pienempi kuin 56° .

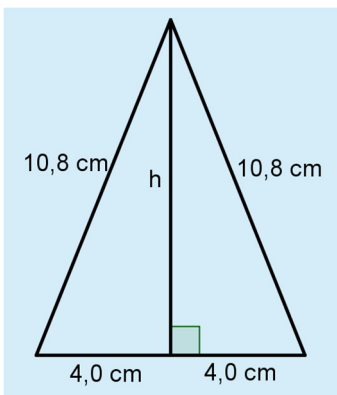
Kolmio ei tällöin ole tasakylkinen. Tämä vaihtoehto on siis mahdoton.

Vastaus: 28° , 28° ja 124°

K17. a) $A = \frac{5,4 \text{ cm} \cdot 1,5 \text{ cm}}{2} = 4,05 \text{ cm}^2 \approx 4,1 \text{ cm}^2$

Vastaus: $4,1 \text{ cm}^2$

b) Kolmio on tasakylkinen, joten korkeusjana h jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon.



Ratkaistaan korkeus h Pythagoraan lauseen avulla.

$$\begin{aligned}h^2 + 4^2 &= 10,8^2 \\h^2 &= 10,8^2 - 4^2 \\h^2 &= 116,64 - 16 \\h^2 &= 100,64 \\h &= \pm\sqrt{100,64}\end{aligned}$$

Ratkaisuksi käy vain positiivinen arvo.

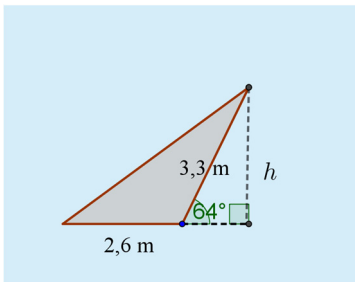
$$h = 10,031\dots$$

Lasketaan kolmion pinta-ala, kun kanta on 8,0 cm ja korkeus on h cm.

$$A = \frac{8,0 \text{ cm} \cdot 10,031\dots \text{ cm}}{2} = 40,127\dots \text{ cm}^2 \approx 40 \text{ cm}^2$$

Vastaus: 40 cm²

- c) Kolmion korkeusjana h on kolmion ulkopuolella.



Kolmion ulkopuolelle muodostuu suorakulmainen kolmio, josta tunnetaan hypotenuusa. Korkeus h saadaan sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin 64^\circ &= \frac{h}{3,3} \quad || \cdot 3,3 \\h &= 3,3 \cdot \sin 64^\circ \\h &= 2,966\dots\end{aligned}$$

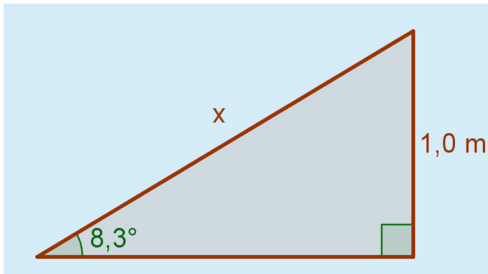
Lasketaan kolmion pinta-ala, kun kanta on 2,6 m ja

korkeus on $h = 2,966\dots$ m.

$$A = \frac{2,6 \text{ m} \cdot 2,966\dots \text{ m}}{2} = 3,855\dots \text{ m}^2 \approx 3,9 \text{ m}^2$$

Vastaus: $3,9 \text{ m}^2$

K18. Piirretään mallikuva. Merkitään luiskan pituutta kirjaimella x .



Kolmiosta tunnetaan kulman vastainen sivu ja hypotenuusa on tuntematon, joten muodostetaan yhtälö sini avulla ja ratkaistaan siitä x .

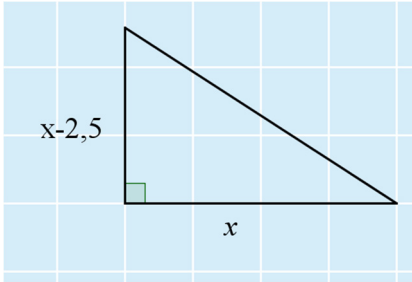
$$\begin{aligned} \sin 8,3^\circ &= \frac{1,0}{x} \quad \parallel \cdot x \\ x \cdot \sin 8,3^\circ &= 1 \quad \parallel : \sin 8,3^\circ \\ x &= \frac{1}{\sin 8,3^\circ} \\ x &= 6,927\dots \end{aligned}$$

Jotta luiska ei olisi liian jyrkkä, on sen pituus pyöristettävä ylöspäin.

Vastaus: $7,0 \text{ m}$

K19. Piirretään mallikuva. Merkitään pidemmän kateetin pituutta kirjaimella x .

Toinen on 2,5 cm lyhyempi, joten sen pituus on $x - 2,5$.



Kolmion pinta-ala lasketaan kannan x ja korkeuden $x - 2,5$ avulla

$$A = \frac{x \cdot (x - 2,5)}{2}.$$

Tiedetään, että pinta-ala on 22 cm^2 , joten muodostetaan kolmion pinta-alasta yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x .

(Yhtälön voi ratkaista myös symbolisen laskennan yhtälönratkaisutoiminnolla.)

$$\begin{aligned} \frac{x \cdot (x - 2,5)}{2} &= 22 \quad \| \cdot 2 \\ x \cdot (x - 2,5) &= 44 \\ x^2 - 2,5x &= 44 \\ x^2 - 2,5x - 44 &= 0 \\ x &= \frac{-(-2,5) \pm \sqrt{(-2,5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-44)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2,5 \pm \sqrt{6,25 + 176}}{2} \\ &= \frac{2,5 \pm \sqrt{182,25}}{2} \\ &= \frac{2,5 \pm 13,5}{2} \\ x &= \frac{2,5 + 13,5}{2} = 8,0 \quad \text{tai} \quad x = \frac{2,5 - 13,5}{2} = -5,5 \end{aligned}$$

Negatiivinen kateetin pituus ei kelpaa, joten pidemmän kateetin pituus on $x = 8,0$ cm.

Lyhempi kateetti on tällöin $x - 2,5$ cm = $8,0$ cm - $2,5$ cm = $5,5$ cm.

Kolmion kolmas sivu on hypotenuusa ja sen pituus y saadaan Pythagoraan lauseella.

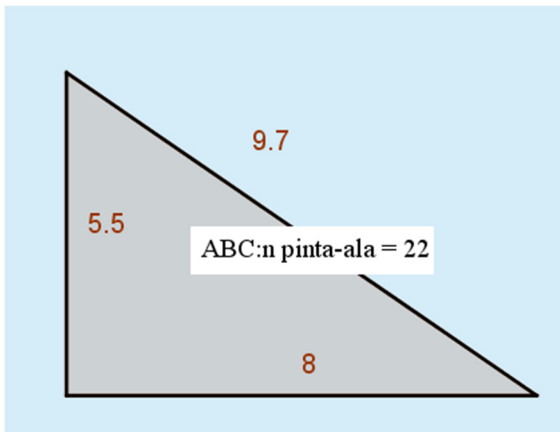
$$\begin{aligned} y^2 &= 8^2 + 5,5^2 \\ y^2 &= 94,25 \\ y &= \pm \sqrt{94,25} \end{aligned}$$

Hypotenuusan pituus on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

$$y = \sqrt{94,25} = 9,708\dots \approx 9,7$$

Kolmion sivujen pituudet ovat $5,5$ cm, $8,0$ cm ja $9,7$ cm.

Tarkistetaan piirtämällä.

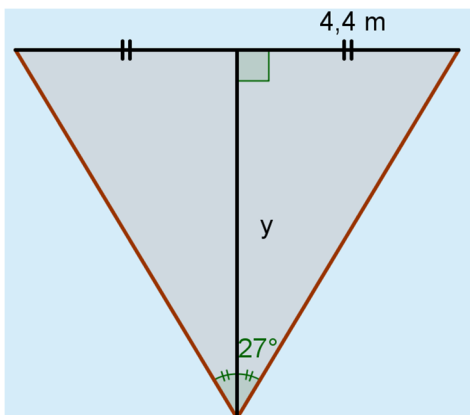


Vastaus: 5,5 cm, 8,0 cm ja 9,7 cm

- K20.** Piirretään kuvakulmista mallikuvat molemmissa suunnissa. Tasakylkisen kolmion korkeusjana jakaa kolmion kahteen yhtenevään suorakulmaiseen kolmioon. Kuvakulman puolikas on suorakulmaisen kolmion kulma.

Leveyssuunta:

$$\frac{8,8\text{m}}{2} = 4,4\text{m} \quad \text{ja} \quad \frac{54^\circ}{2} = 27^\circ$$



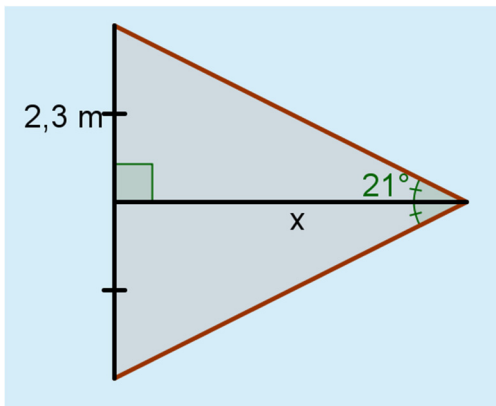
Jotta koko taulu mahtuisi kuvaan leveysuunnassa, on etäisyyden taulusta oltava vähintään y .

Ratkaistaan y tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 27^\circ &= \frac{4,4}{y} \quad \parallel \cdot y \\ y \cdot \tan 27^\circ &= 4,4 \quad \parallel : \tan 27^\circ \\ y &= \frac{4,4}{\tan 27^\circ} \\ y &= 8,635\dots\end{aligned}$$

Korkeussuunta:

$$\frac{4,6\text{m}}{2} = 2,3\text{m} \quad \text{ja} \quad \frac{42^\circ}{2} = 21^\circ$$



Jotta koko taulu mahtuisi kuvaan korkeussuunnassa, on etäisyyden taulusta oltava vähintään x .

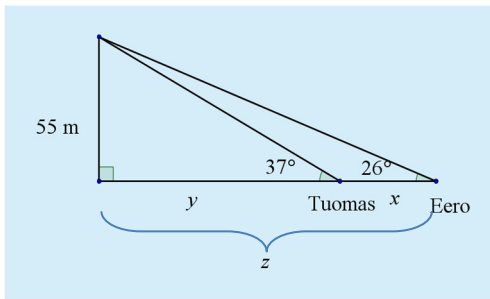
Ratkaistaan x tangentin avulla.

$$\begin{aligned}\tan 21^\circ &= \frac{2,3}{x} \quad || \cdot x \\ x \cdot \tan 21^\circ &= 2,3 \quad || : \tan 21^\circ \\ x &= \frac{2,3}{\tan 21^\circ} \\ x &= 5,991\dots\end{aligned}$$

Leveyssuunnan mahtuminen vaatii pidemmän etäisyyden.
Etäisyys on pyöristettävä ylöspäin 8,7 metriin.

Vastaus: vähintään 8,7 m:n etäisyydeltä

K21. Piirretään mallikuva.



Merkitään kysyttyä Tuomaksen ja Eeron etäisyyttä toisistaan kirjaimella x ja Tuomaksen etäisyyttä tornista kirjaimella y .

Tällöin Eeron etäisyys tornista on $x + y$, jota merkitään laskujen helpottamiseksi kirjaimella $z = x + y$.

Ratkaistaan etäisyydet y ja z tangentin avulla.

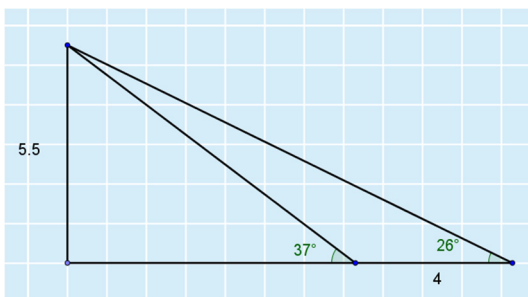
$$\begin{aligned}\tan 37^\circ &= \frac{55}{y} \quad || \cdot y \\ y \cdot \tan 37^\circ &= 55 \quad || : \tan 37^\circ \\ y &= \frac{55}{\tan 37^\circ} \\ y &= 72,987\dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 26^\circ &= \frac{55}{z} \quad || \cdot z \\ z \cdot \tan 26^\circ &= 55 \quad || : \tan 26^\circ \\ z &= \frac{55}{\tan 26^\circ} \\ z &= 112,766\dots\end{aligned}$$

Oli merkitty $z = x + y$, joten kysytty etäisyys x on edellä laskettujen etäisyyksien (z ja y) erotus

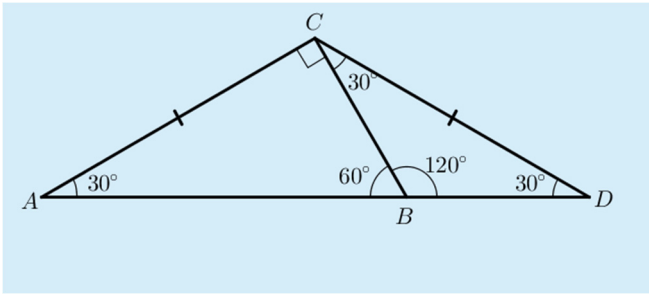
$$x = z - y = 112,766\dots \text{ m} - 72,987\dots \text{ m} = 39,779\dots \text{ m} \approx 40 \text{ m.}$$

Tarkistetaan piirtämällä. Valitaan koordinaatiston akselien yksiköksi 10 metriä.



Vastaus: 40 m:n etäisyydellä

K22. Täydennetään kuvaan kulmien suuruuksia.



Kolmio CAD on tasakylkinen tehtävässä olevan kuvan merkintöjen perusteella. Tällöin kulmat A ja D ovat kantakulmina yhtä suuret eli 30° .

Kolmion kulmien summa on 180° , joten huippukulma C on tällöin $180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

Lisäksi kulma C muodostuu kahdesta kulmasta $120^\circ = 90^\circ + 30^\circ$.

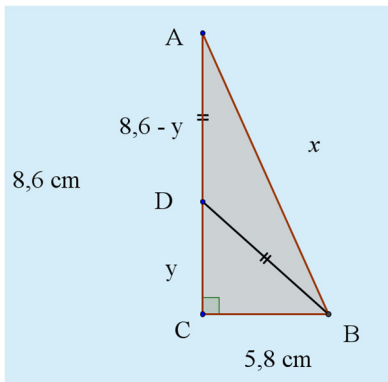
Täten kolmion BDC kulmat C ja D ovat molemmat 30° .

Kolmio BDC on siis tasakylkinen kolmio, jonka huippukulma B on 120° . Molemmat kolmiot ovat tasakylkisiä kolmioita ja niillä on kaikki kolme vastinkulmaa yhtä suuret.

Kolmiot ovat siis kk-lauseen perusteella yhdenmuotoiset.

K23. Piirretään mallikuva. Merkitään hypotenuusaa AB kirjaimella x ja toista kysyttyä janaa CD kirjaimella y .

Tällöin janat $AD = DB = 8,6 - y$.



Ratkaistaan ison kolmion ACB hypotenuusan pituus AB Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 8,6^2 + 5,8^2$$

$$x^2 = 73,96 + 33,64$$

$$x^2 = 107,6$$

$$x = \sqrt{107,6} \text{ tai } x = -\sqrt{107,6}$$

Janan pituus on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

$$x = \sqrt{107,6} = 10,373\dots \approx 10,4$$

Janan AB pituus on $x \approx 10,4$ cm.

Muodostetaan Pythagoraan lause pienen kolmion DCB sivujen välille, kun kateetit ovat y ja $5,8$ ja hypotenuusa on $8,6 - y$.

$$(8,6 - y)^2 = y^2 + 5,8^2$$

Ratkaistaan yhtälöstä janan CD pituus y .

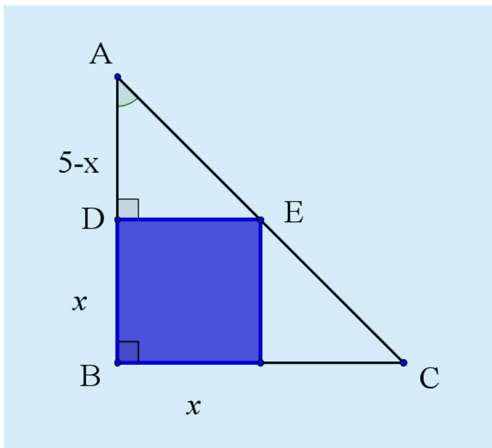
(Ratkaisun voi suorittaa myös symbolisen laskennan ohjelman yhtälönratkaisutoiminnolla.)

$$\begin{aligned}
 (8,6 - y)^2 &= y^2 + 5,8^2 \\
 (8,6 - y)(8,6 - y) &= y^2 + 33,64 \\
 73,96 - 8,6y - 8,6y + y^2 &= y^2 + 33,64 \\
 73,96 - 17,2y + y^2 &= y^2 + 33,64 \\
 73,96 - 17,2y + \cancel{y^2} - \cancel{y^2} - 33,64 &= 0 \\
 73,96 - 17,2y - 33,64 &= 0 \\
 -17,2y + 40,32 &= 0 \\
 -17,2y &= -40,32 \quad ||: (-17,2) \\
 y &= 2,344\dots
 \end{aligned}$$

Janan CD pituus on $y = 2,344\dots$ cm $\approx 2,3$ cm.

Vastaus: $AB \approx 10,4$ cm ja $CD \approx 2,3$ cm

- K24.** Lasketaan sinisen neliön pinta-ala.
Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella x .



Kuvan suorakulmaiset kolmiot ADE ja ABC ovat yhdenmuotoiset kkalauseen perusteella, koska molemmissa kolmioissa on suorakulma ja lisäksi yhteinen kulma A .

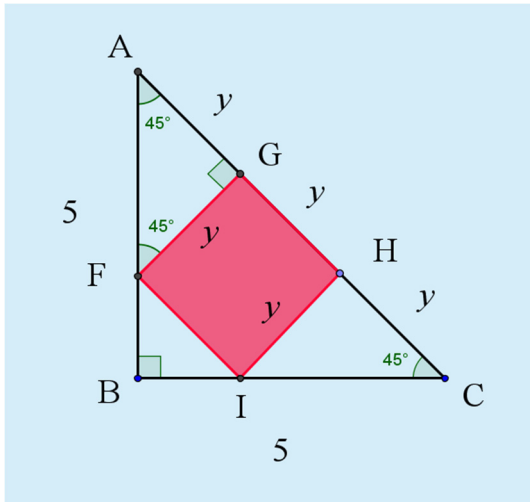
Ison kolmion ABC kateetit ovat 5 ja 5 ja pienen kolmion ADE vastaavat kateetit ovat $5 - x$ ja x .

Muodostetaan verranto, josta ratkaistaan sivun x pituus.

$$\begin{aligned}\frac{5-x}{5} &= \frac{x}{5} \\ 5x &= 5 \cdot (5-x) \\ 5x &= 25 - 5x \\ 5x + 5x &= 25 \\ 10x &= 25 \quad ||:10 \\ x &= 2,5\end{aligned}$$

Sinisen neliön sivun pituus on $x = 2,5$
ja pinta-ala on $A_s = x^2 = 2,5^2 = 6,25$.

Lasketaan punaisen neliön pinta-ala.
Merkitään neliön sivun pituutta kirjaimella y .



Kuvan alkuperäinen suorakulmainen kolmio ABC on tasakylkinen, koska molemmat kateetit ovat 5. Tällöin kantakulmat A ja C ovat yhtä suuret. Koska kantakulmien summan on oltava 90° (kolmion kulmien summa on oltava 180°), niin kantakulmien on oltava 45° .

Neliön yläpuolella olevassa pienessä kolmiossa AGF kulman F on oltava myös 45° , jotta pienenkin kolmion kulmien summa on 180° .

Pieni kolmio AGF on täten myös tasakylkinen kolmio, jonka kantakulmat ovat 45° . Tällöin molempien kylkien FG ja AG pituudet ovat y .

Vastaavalla tavalla toinen pieni kolmio CHI on tasakylkinen kolmio, jonka kantakulmat C ja I ovat 45° ja kylkien IH ja CH pituudet ovat y .

Merkitään ison kolmion ABC hypotenuusaa AC kirjaimella z .

Se jakaantuu kolmeen y :n suuruiseen janaan eli $z = 3y$.

Ratkaistaan hypotenuusan pituus z Pythagoraan lauseella.

$$\begin{aligned}z^2 &= 5^2 + 5^2 \\z^2 &= 25 + 25 \\z^2 &= 50 \\z &= \pm\sqrt{50}\end{aligned}$$

Sivun pituus on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

Edellä saatiin, että hypotenuusa on toisaalta $3y$, joten saadaan

$$\begin{aligned}3y &= \sqrt{50} \\y &= \frac{\sqrt{50}}{3}\end{aligned}$$

Punaisen neliön sivun pituus on $y = \frac{\sqrt{50}}{3} = 2,357\dots$

ja pinta-ala on $A_p = y^2 = \left(\frac{\sqrt{50}}{3}\right)^2 = 5,555\dots$

Sinisen neliön pinta-ala on $As = 6,25$
 ja punaisen neliön pinta-ala on $Ap = 5,555\dots$,
 joten sinisen neliön pinta-ala on suurempi, kuin punaisen neliön pinta-ala.

(Tai voidaan myös verrata neliöiden sivujen pituuksia:
 Sinisen neliön sivun pituus on $x = 2,5$
 ja punaisen neliön sivun pituus on $y = 2,357\dots$

Koska $2,5 > 2,357\dots$, niin sinisen neliön pinta-ala on oltava suurempi, kuin punaisen neliön pinta-ala.)

Vastaus: sinisen neliön

K25. a) Muutetaan sivujen pituudet samaan yksikköön: $340 \text{ cm} = 3,4 \text{ m}$.

Suorakulmion pinta-ala on $A = ah = 4,5 \text{ m} \cdot 3,4 \text{ m} = 15,3 \text{ m}^2 \approx 15 \text{ m}^2$.

Vastaus: 15 m^2

b) Suunnikkaan kanta on $a = 7,2 \text{ mm}$ ja korkeus on $h = 3,1 \text{ mm}$.

Pinta-ala on $A = ah = 7,2 \text{ mm} \cdot 3,1 \text{ mm} = 22,32 \text{ mm}^2 \approx 22 \text{ mm}^2$

Vastaus: 22 mm^2

c) Nelikulmio on puolisuunnikas, joten pinta-ala on

$$A = \frac{a+b}{2} h = \frac{3,4+6,3}{2} \cdot 2,7 = 13,095 \approx 13$$

Pinta-ala on noin 13 cm^2 .

Vastaus: 13 cm^2

K26. Suorakulmion kaikki kulmat ovat 90° , joten kuvioon A sopii ominaisuus II.

Nelikulmion kaikki sivut voivat olla erisuuntaisia, joten kuvioon B sopii ominaisuus I. Ominaisuudet I, III ja IV koskevat vain osaa nelikulmioista, joten niitä ei voi yhdistää kuvioon B.

Puolisuunnikkaassa on täsmälleen kaksi yhdensuuntaista sivua, joten siinä on täsmälleen kaksi erisuuntaista sivua (lopun sivut).

Kuvioon C sopii siis ominaisuus IV.

Vinoneliön lävistäjät leikkaavat toisensa kohtisuorasti, joten kuvioon D sopii ominaisuus III.

Vastaus: A:II, B:I, C:IV ja D:III

K27. a) Kuvan nelikulmio on suorakulmio. Muodostetaan Pythagoraan lauseen avulla yhtälö ja ratkaistaan siitä suorakulmion korkeus h .

$$h^2 + 20^2 = 25^2$$

$$h^2 = 25^2 - 20^2$$

$$h^2 = 625 - 400$$

$$h^2 = 225$$

$$h = \pm\sqrt{225}$$

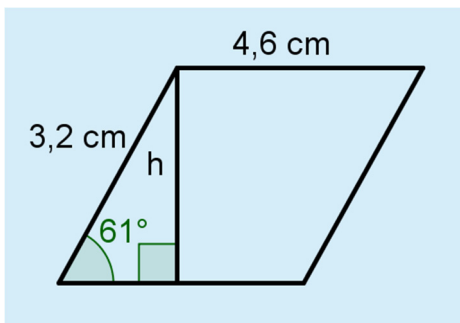
Korkeus on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

$$h = \sqrt{225} = 15$$

Suorakulmion pinta-ala on $A = 20 \text{ mm} \cdot 15 \text{ mm} = 300 \text{ mm}^2$.

Vastaus: 300 mm^2

- b) Kuvan nelikulmio on suunnikas. Piirretään sille korkeusjana h .



Korkeusjana erottaa suunnikkaasta suorakulmaisen kolmion.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä suunnikkaan korkeus h .

$$\begin{aligned}\sin 61^\circ &= \frac{h}{3,2} \quad || \cdot 3,2 \\ h &= 3,2 \cdot \sin 61^\circ \\ h &= 2,798\dots\end{aligned}$$

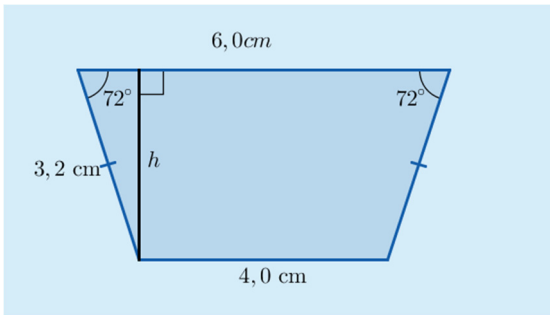
Lasketaan suunnikkaan pinta-ala.

$$A = 4,6 \text{ cm} \cdot 2,798\dots \text{ cm} = 12,874\dots \text{ cm}^2 \approx 13 \text{ cm}^2.$$

Suunnikkaan pinta-ala on 13 cm^2 .

Vastaus: 13 cm^2

- c) Kuvio on puolisuunnikas. Piirretään puolisuunnikkaalle korkeus h .



Ratkaistaan korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta sinin avulla.

$$\begin{aligned}\sin 72^\circ &= \frac{h}{3,2} \quad || \cdot 3,2 \\ h &= 3,2 \cdot \sin 72^\circ \\ h &= 3,043\dots\end{aligned}$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on

$$A = \frac{a+b}{2} \cdot h = \frac{4,0+6,0}{2} \cdot 3,043\dots = 15,216\dots \approx 15$$

Puolisuunnikkaan pinta-ala on noin 15 cm^2 .

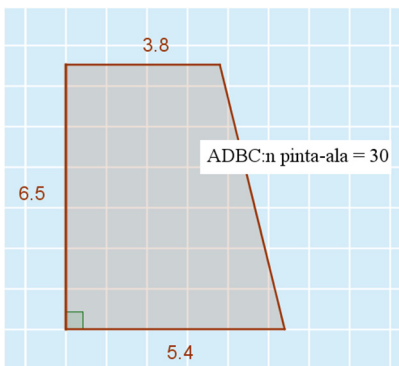
Vastaus: 15 cm^2

- K28.** Merkitään puolisuunnikkaan korkeutta kirjaimella h . Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan korkeus siitä. Ennen sijoittamista yhtälöön on muunnettava luvut samaan yksikköön: $0,3 \text{ m}^2 = 30 \text{ dm}^2 = 3\,000 \text{ cm}^2$.

$$\begin{aligned} \frac{54+38}{2} \cdot h &= 3000 \\ \frac{92}{2} \cdot h &= 3000 \\ 46h &= 3000 \quad ||: 46 \\ h &= 65,217\dots \\ h &\approx 65 \end{aligned}$$

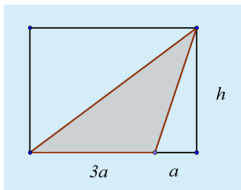
Korkeus on noin 65 cm.

Tarkistetaan piirtämällä. Valitaan koordinaatiston akselien yksiköksi 10 cm.



Vastaus: 65 cm

K29. Merkitään suorakulmion korkeutta kirjaimella h .



Suorakulmion toinen sivu on $3a + a = 4a$ ja korkeus h , joten pinta-ala on

$$A_s = 4a \cdot h = 4ah.$$

Väritetyn kolmion kanta on $3a$ ja korkeus h , joten pinta-ala on

$$A_k = \frac{3a \cdot h}{2} = \frac{3ah}{2} = 1,5ah$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia väritetyn kolmion pinta-ala on suorakulmion pinta-alasta.

$$\frac{A_k}{A_s} = \frac{1,5\cancel{a}h}{4\cancel{a}h} = 0,375$$

Kolmion pinta-ala on 37,5 % suorakulmion pinta-alasta, joten suorakulmion alasta on väritetty 37,5 %.

Vastaus: 37,5 %

K30. a) Väritetty alue on ympyrä, jonka säde on $\frac{4,4 \text{ cm}}{2} = 2,2 \text{ cm}$.

Ympyrän pinta-ala on $\pi \cdot r^2 = \pi \cdot (2,2 \text{ cm})^2 = 15,205\dots \text{ cm}^2 \approx 15 \text{ cm}^2$.

Ympyrän piiri on $\pi \cdot d = \pi \cdot 4,4 \text{ cm} = 13,823\dots \text{ cm} \approx 14 \text{ cm}$.

Vastaus: 15 cm^2 , 14 cm

- b) Väritetty alue on ympyräsektori, jonka säde on 2,8 cm ja keskuskulma 105° .

Sektorin pinta-ala on

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{105^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (2,8 \text{ cm})^2 = 7,183\dots \text{ cm}^2 \approx 7,2 \text{ cm}^2$$

Sektorin piiri saadaan laskemalla yhteen sektorin kaaren pituus ja sektorin säde kaksinkertaisena:

$$\begin{aligned} p_{\text{sektori}} &= b + 2r = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r + 2r \\ &= \frac{105^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 2,8 \text{ cm} + 2 \cdot 2,8 \text{ cm} = 10,731\dots \text{ cm} \approx 11 \text{ cm} \end{aligned}$$

Vastaus: $7,2 \text{ cm}^2$ ja 11 cm

- c) Väritetty alue on ympyräsektori, jonka säde on 1,9 cm ja keskuskulma $360^\circ - 80^\circ = 280^\circ$.

Sektorin pinta-ala on

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{280^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot (1,9 \text{ cm})^2 = 8,820\dots \text{ cm}^2 \approx 8,8 \text{ cm}^2$$

Sektorin piiri saadaan laskemalla yhteen sektorin kaaren pituus ja sektorin säde kaksinkertaisena:

$$\begin{aligned} p_{\text{sektori}} &= b + 2r = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r + 2r \\ &= \frac{280^\circ}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 1,9 \text{ cm} + 2 \cdot 1,9 \text{ cm} = 13,085\dots \text{ cm} \approx 13 \text{ cm} \end{aligned}$$

Vastaus: $8,8 \text{ cm}^2$ ja 13 cm

K31. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä säde r .

$$\begin{aligned}
 300 &= \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 \\
 300 &= \frac{72^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot r^2 \quad \parallel \cdot 360^\circ \\
 72^\circ \pi \cdot r^2 &= 300 \cdot 360^\circ \quad \parallel : 72^\circ \pi \\
 r^2 &= \frac{300 \cdot 360^\circ}{72^\circ \pi} \\
 r &= \pm \sqrt{\frac{300 \cdot 360^\circ}{72^\circ \pi}}
 \end{aligned}$$

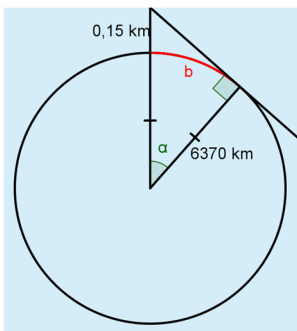
Säde on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

$$r = \sqrt{\frac{300 \cdot 360^\circ}{72^\circ \pi}} = 21,850\dots \approx 22$$

Sektorin säde r on oltava noin 22 m.

Vastaus: 22 m

K32. Piirretään mallikuva. Helikopteri lentää $150 \text{ m} = 0,15 \text{ km}$ korkeudella.



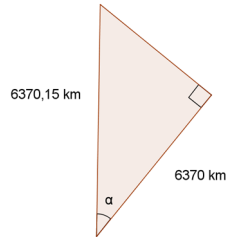
Helikopterista voidaan parhaimmillaan nähdä pisteeseen, jossa helikopterista piirretty tangentti sivuaa maapallon pintaa.

Kaaren b pituuden laskemiseksi lasketaan ensin keskuskulma α suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusa on $6370 + 0,15 = 6370,15$.

$$\cos \alpha = \frac{6370}{6370 + 0,15}$$

$$\cos \alpha = \frac{6370}{6370,15}$$

$$\alpha = 0,393\dots^\circ$$



Lasketaan kaaren pituus b .

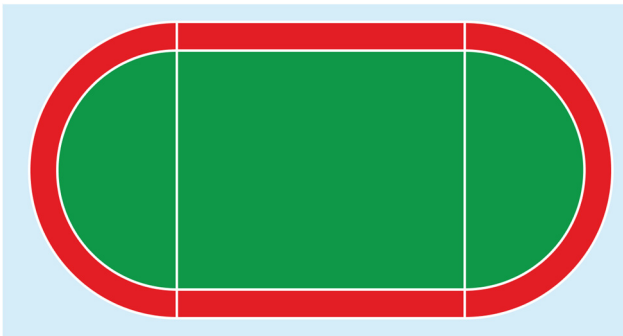
$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot r = \frac{0,393\dots^\circ}{360^\circ} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 6370 \text{ km} = 43,714\dots \text{ km}$$

Helikopterista voidaan parhaimmillaan nähdä noin 44 kilometrin päähän merelle, joten vastarannalle 70 km päähän näkeminen ei ole mahdollista.

Vastaus: Ei näy.

K33. Päissä olevat kaksi samanlaista puoliympyrän kaarta muodostavat yhden kokonaisen ympyrän kehän.

Tämän pituus on $p = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 36 \text{ m} = 226,194\dots \text{ m}$.



Loppuosa 400 metrin juoksuradasta koostuu kahdesta yhtä pitkästä suorasta osuudesta, joten yhden suoran osuuden pituus on

$$\frac{400 \text{ m} - 226,194\dots \text{ m}}{2} = 86,9026\dots \text{ m}.$$

Juoksuradan suorat osuudet ovat 86,90 m.

Kaikissa radoissa on yhtä pitkät suorat osuudet, mutta kaarevan osuuden pituus vaihtelee, koska säde vaihtelee.

Yhden radan leveys on 122 cm = 1,22 m.

Kahdeksannen eli uloimman radan sisäreunan säde on $7 \cdot 1,22 \text{ m}$ suurempi kuin ensimmäisen eli sisimmän radan sisäreunan säde 36m.

Uloimman radan säde on siten $36 \text{ m} + 7 \cdot 1,22 \text{ m} = 44,54 \text{ m}$.

Uloimman radan puoliympyröiden yhteispituus on

$$p = 2\pi r = 2 \cdot \pi \cdot 44,54 \text{ m} = 279,853\dots \text{ m}.$$

Ratojen pituusero on kaarien pituusero

$$279,853\dots \text{ m} - 226,194\dots \text{ m} = 53,658\dots \text{ m} \approx 53,66 \text{ m}.$$

Prosentteina pituusero on $\frac{53,658\dots}{400} = 0,134\dots \approx 13,4 \%$.

Vastaus: Suorat osat ovat 86,90 m pitkiä. Ulkorata on 53,66 m sisärataa pidempi eli pituusero on 13,4 %.

K34. a) Janan päätepisteet ovat $(1, 5)$ ja $(-5, 13)$, joten janan

$$\text{keskipisteen } x\text{-koordinaatti on } \frac{1+(-5)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

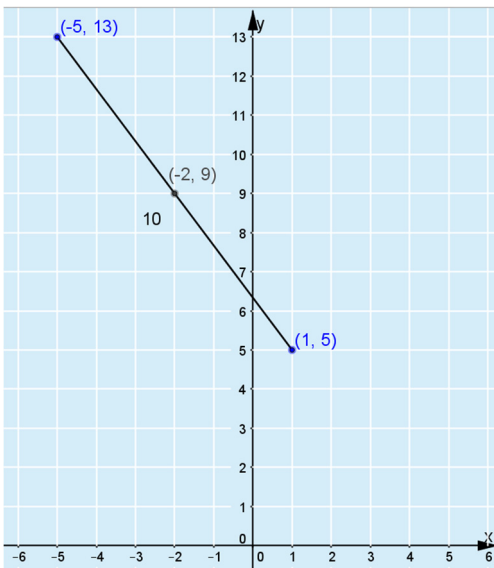
$$\text{ja } y\text{-koordinaatti on } \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9.$$

Vastaus: $(-2, 9)$

b) Janan pituus on

$$\sqrt{((-5)-1)^2 + (13-5)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10.$$

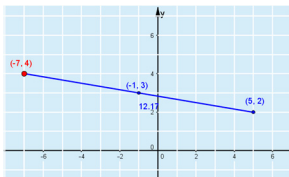
Tarkistetaan a- ja b-kohdat piirtämällä.



Vastaus: 10

K35. Ratkaistaan tehtävä appletilla.

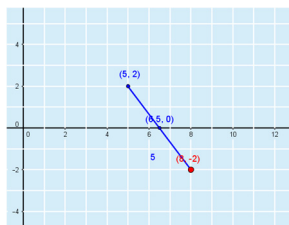
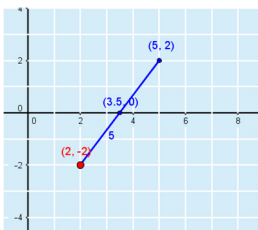
a)



Janan toinen päätepiste on $(-7, 4)$

Vastaus: $(-7, 4)$

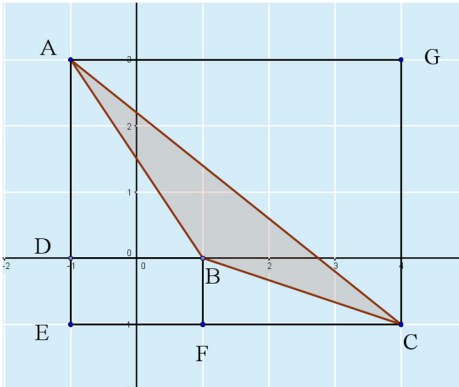
b)



Janan toinen päätepiste on $(2, -2)$ tai $(8, -2)$

Vastaus: $(2, -2)$ tai $(8, -2)$

K36. Täydennetään kuvaa.



Kehystetään kolmio ABC suorakulmiolla $AECG$, joka kulkee kolmion kärkien A ja C kautta ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.

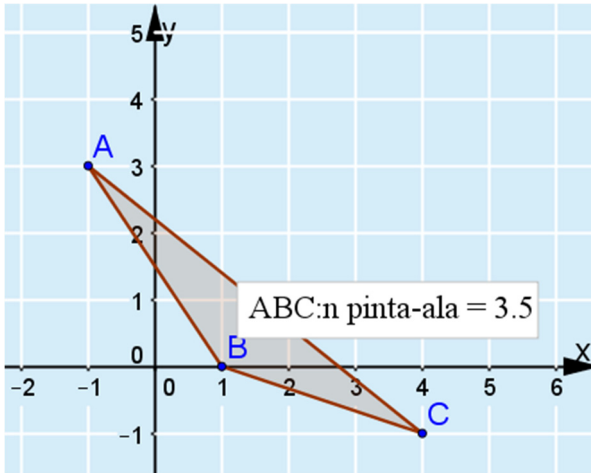
Kolmion ABC pinta-ala saadaan vähentämällä suorakulmion $AECG$ pinta-alasta suorakulmaisten kolmioiden ADB , BFC ja CGA ja suorakulmion $DEFB$ pinta-alat.

Kuvioiden mitat saadaan kuvasta ruutujen avulla.

$$\begin{aligned} A_{ABC} &= 5 \cdot 4 - \left(\frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2} + \frac{4 \cdot 5}{2} + 1 \cdot 2 \right) \\ &= 20 - \left(3 + \frac{3}{2} + 10 + 2 \right) = 20 - \left(16 \frac{1}{2} \right) = 3 \frac{1}{2} = 3,5 \end{aligned}$$

Pinta-ala on $3 \frac{1}{2}$.

Tarkistetaan piirtämällä.



Vastaus: $3\frac{1}{2}$

K37. Janan päätepisteet ovat $A(-3, 1)$ ja $B(9, -4)$, joten janan AB eli ympyrän halkaisijan pituus on

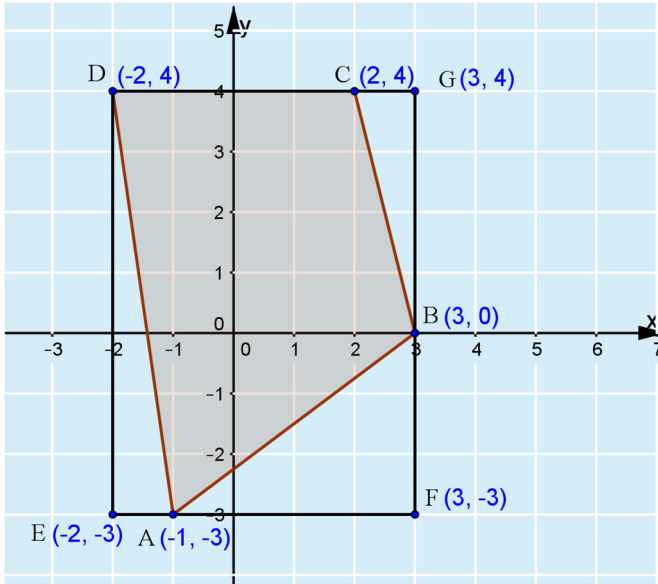
$$\sqrt{(9 - (-3))^2 + (-4 - 1)^2} = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13.$$

Ympyrän säde on $r = \frac{13}{2} = 6,5$ ja ympyrän ala on

$$A = \pi r^2 = \pi \cdot 6,5^2 = 132,732\dots \approx 133.$$

Vastaus: 133

- K38.** Piirretään nelikulmio $ABCD$ koordinaatistoon ja kehystetään se suorakulmiolla, joka kulkee nelikulmion kärkien kautta ja jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset.



Nelikulmion $ABCD$ pinta-ala saadaan vähentämällä suorakulmion $EFGD$ pinta-alasta suorakulmaisten kolmioiden DEA , BAF ja GCB pinta-alat.

Kuvioiden mitat saadaan kuvan ja pisteiden koordinaattien avulla.

$$A_{ABCD} = 5 \cdot 7 - \left(\frac{1 \cdot 7}{2} + \frac{4 \cdot 3}{2} + \frac{1 \cdot 4}{2} \right) = 23 \frac{1}{2} = 23,5.$$

Piiriä varten lasketaan sivujen AD , AB ja BC pituudet.

$$AD = \sqrt{(-2 - (-1))^2 + (4 - (-3))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}$$

$$AB = \sqrt{(3 - (-1))^2 + (0 - (-3))^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$BC = \sqrt{(2-3)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 4^2} = \sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

$$CD = 4$$

$$\text{Piiri on } \sqrt{50} + 5 + \sqrt{17} + 4 = 9 + \sqrt{50} + \sqrt{17} = 20,194\dots \approx 20,2.$$

Vastaus: pinta-ala 23,5 ja piiri 20,2

K39. Kaupunkien A ja C etäisyys eli janan AC pituus on

$$\sqrt{(5-(-4))^2 + (16-(-5))^2} = \sqrt{9^2 + 21^2} = \sqrt{81+441} = \sqrt{522} = 22,8473\dots$$

Kaupunkien A ja B etäisyys eli janan AB pituus on

$$\sqrt{(-1-(-4))^2 + (2-(-5))^2} = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58} = 7,6157\dots$$

Lentokone kulki pisteestä A pisteeseen C klo 12.00 – klo 13.18 eli 1h ja 18 min eli 78 minuutissa.

Taulukoidaan matkat ja ajat väleillä AC ja AB .

Aika (min)	Matka
78	22,8473...
x	7,6157...

Kuljettu matka ja matkaan kulunut aika ovat suoraan verrannollisia.

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä aika x .

$$\frac{78}{x} = \frac{22,8473\dots}{7,61577\dots}$$

$$22,8473\dots \cdot x = 78 \cdot 7,61577\dots \quad ||: 22,8473\dots$$

$$x = 26$$

Lentokone ylitti kaupungin B , kun se oli lentänyt 26 minuuttia kaupungista A . Tällöin kello oli 12.26.

(TAI Tehtävän voi ratkaista myös nopeuksien avulla.)

Vastaus: klo 12.26

K40. a) Kuution särmän pituus on 3,0 m.

Kuution tilavuus on $V = (3,0 \text{ m})^3 = 27 \text{ m}^3$.

Kuution tahkojen kokonaispinta-ala on $A = 6 \cdot (3,0 \text{ m})^2 = 54 \text{ m}^2$.

Vastaus: 27 m^3 ja 54 m^2

b) Pallon säde on $r = \frac{3,0 \text{ m}}{2} = 1,5 \text{ m}$.

Pallon tilavuus on

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1,5 \text{ m})^3 = 14,137\dots \text{m}^3 \approx 14 \text{m}^3$$

Pallon pinta-ala on

$$A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot (1,5 \text{ m})^2 = 28,274\dots \text{m}^2 \approx 28 \text{m}^2.$$

Vastaus: 14 m^3 ja 28 m^2

- c) Lieriön tilavuus on $V = \pi \cdot (2,0 \text{ m})^2 \cdot 3 \text{ m} = 37,699\dots \text{ m}^3 \approx 38 \text{ m}^3$.

Lieriön kokonaispinta-ala

$$\begin{aligned} A_{\text{koko}} &= A_{\text{vaippa}} + 2 \cdot A_{\text{pohja}} \\ &= 2\pi r h + 2 \cdot \pi r^2 \\ &= 2\pi \cdot 2,0 \text{ m} \cdot 3 \text{ m} + 2 \cdot \pi \cdot (2,0 \text{ m})^2 \\ &= 62,831\dots \text{ m}^2 \\ &\approx 63 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Vastaus: 38 m^3 ja 63 m^2

- K41.** a) Kappale on puolipallo, joten sen tilavuus on puolet pallon tilavuudesta.

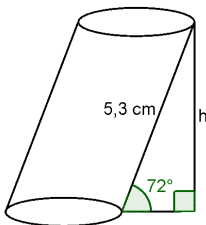
Tilavuus on

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot (1,8 \text{ m})^3 = 12,214\dots \text{ m}^3 \approx 12 \text{ m}^3$$

Vastaus: 12 m^3

- b) Kappale on vino ympyrälieriö, jonka korkeutta ei tunneta.

Piirretään mallikuva.



Korkeusjana h ja lieriön sivujana ovat suorakulmaisen kolmion sivuina. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä lieriön korkeus h sinin avulla.

$$\sin 72^\circ = \frac{h}{5,3} \quad || \cdot 5,3$$

$$5,3 \cdot \sin 72^\circ = h$$

$$h = 5,3 \cdot \sin 72^\circ$$

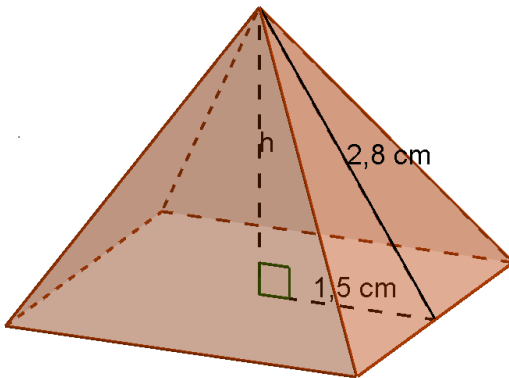
$$h = 5,040\dots$$

Lieriön tilavuus on

$$V = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (1,2 \text{ cm})^2 \cdot 5,040\dots \text{ cm} = 22,803\dots \text{ cm}^3 \approx 23 \text{ cm}^3.$$

Vastaus: 23 cm^3

- c) Kappale on suora neliöpohjainen pyramidi, jonka korkeus h on tuntematon. Piirretään mallikuva.



Muodostetaan Pythagoraan lauseella yhtälö suorakulmaisesta kolmiosta, jonka hypotenuusana on pyramidin sivutahkokolmion korkeus 2,8 cm ja toisena kateettina pohjaneliön puolikas.

Ratkaistaan yhtälöstä korkeus h .

$$h^2 + 1,5^2 = 2,8^2$$

$$h^2 = 2,8^2 - 1,5^2$$

$$h^2 = 5,59$$

$$h = \pm\sqrt{5,59}$$

Korkeus on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

$$h = \sqrt{5,59} = 2,364\dots$$

Pyramidin tilavuus on

$$\frac{1}{3} \cdot (3,0 \text{ cm})^2 \cdot 2,236\dots \text{ cm} = 7,092\dots \text{ cm}^3 \approx 7,1 \text{ cm}^3$$

Vastaus: $7,1 \text{ cm}^3$

K42. Paalin säde on $\frac{120 \text{ cm}}{2} = 60 \text{ cm} = 6 \text{ dm}$

ja korkeus on $90 \text{ cm} = 9 \text{ dm}$.

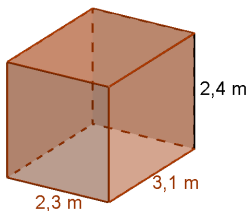
Tilavuus on $V = \pi \cdot (6 \text{ dm})^2 \cdot 9 \text{ dm} = 1017,876\dots \text{ dm}^3$.

Massa on tiheyden ja tilavuuden tulo:

$$m = \rho \cdot V = 0,4 \text{ kg/dm}^3 \cdot 1017,876\dots \text{ dm}^3 = 407,150\dots \text{ kg} \approx 410 \text{ kg}.$$

Vastaus: 410 kg

K43. Piirretään mallikuva.



Eristettävä ja laatoitettava pinta-ala saadaan, kun lattian ja seinien yhteispinta-alasta vähennetään oven ja ikkunoiden pinta-ala.

$$A = 2,3 \text{ m} \cdot 3,1 \text{ m} + 2 \cdot 3,1 \text{ m} \cdot 2,4 \text{ m} + 2 \cdot 2,3 \text{ m} \cdot 2,4 \text{ m} - 2,9 \text{ m}^2 \\ = 30,15 \text{ m}^2.$$

Hinnaksi tulee $30,15 \text{ m}^2 \cdot 360 \text{ €/m}^2 = 10\,854 \text{ €} \approx 11\,000 \text{ €}$.

Vastaus: 11 000 €

K44. Korin halkaisija on 19 cm, joten säde on $r = \frac{19 \text{ cm}}{2} = 9,5 \text{ cm}$.

Korin vaipan pinta-ala on

$$A_{\text{vaippa}} = 2\pi rh = 2 \cdot \pi \cdot 9,5 \text{ cm} \cdot 21 \text{ cm} = 1253,495\dots \text{ cm}^2.$$

Korin pohjan pinta-ala on $A_{\text{pohja}} = \pi r^2 = \pi \cdot (9,5 \text{ cm})^2 = 283,528\dots \text{ cm}^2$.

Tarvittavan langan määrä on suoraan verrannollinen pinta-alaan. Taulukoidaan pinta-alat ja langan määrät.

Merkitään vaippaan tarvittavan langan määrää kirjaimella x .

	Pinta-ala (cm ²)	Lankaa (g)
Vaippa	1253,495...	x
Pohja	283,528...	19

Muodostetaan verranto ja ratkaistaan siitä massa x .

$$\frac{A_{\text{vaippa}}}{A_{\text{pohja}}} = \frac{x}{19}$$

$$\frac{1253,495\dots}{283,528\dots} = \frac{x}{19}$$

$$283,528\dots \cdot x = 1253,495\dots \cdot 19 \quad ||: 283,528\dots$$

$$x = \frac{1253,495\dots \cdot 19}{283,528\dots}$$

$$x = 84$$

Lankaa tarvitaan 84 g.

Vastaus: 84 g

K45. Maidon tilavuus on $1 \text{ l} = 1 \text{ dm}^3 = 1000 \text{ cm}^3$.

Maitopurkin pohjan pinta-ala on $A = (7 \text{ cm})^2 = 49 \text{ cm}^2$.

Muodostetaan tilavuudesta yhtälö, josta ratkaistaan korkeus h .

$$V = A \cdot h$$

$$A \cdot h = V$$

$$49 \cdot h = 1000 \quad ||: 49$$

$$h = \frac{1000}{49}$$

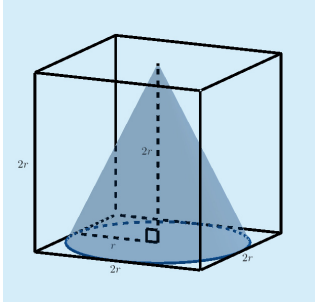
$$h = 20,408\dots \approx 20$$

Maidon korkeus on noin 20 cm.

Vastaus: 20 cm:n korkeudelle

K46. Piirretään mallikuva ja merkitään kartion pohjaympyrän sädettä kirjaimella r . Tällöin kartion pohjaympyrän halkaisija on $2r$.

Myös kuution särmän pituus on $2r$ ja kartion korkeus on $2r$.



Kuution tilavuus on $V_{\text{kuutio}} = (2r)^3 = 2^3 r^3 = 8r^3$.

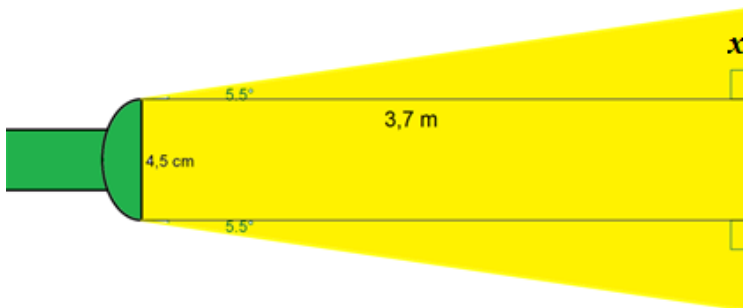
Kartion tilavuus on $V_{\text{kartio}} = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot 2r = \frac{2}{3} \pi r^3$.

Kuution ja kartion tilavuuksien suhde on

$$\frac{V_{\text{kartio}}}{V_{\text{kuutio}}} = \frac{\frac{2}{3} \pi r^3}{8 r^3} = \frac{\pi}{3 \cdot 4} = \frac{\pi}{12} = 0,261\dots \approx 26\%$$

Vastaus: 26 %

- K47.** Merkitään suorakulmaisen kolmion kateettia kirjaimella x ja lasketaan sen pituus tangentin avulla.



$$\begin{aligned}\tan 5,5^\circ &= \frac{x}{3,7} \\ x &= 3,7 \cdot \tan 5,5^\circ \\ x &= 0,356\dots\end{aligned}$$

Seinään muodostuvan ympyrän halkaisija on

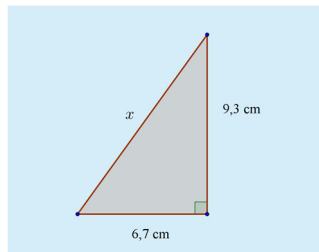
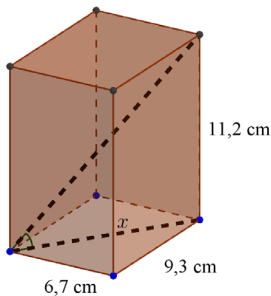
$$2 \cdot 0,356\dots\text{m} + 0,045\text{ m} = 0,757\dots\text{m}$$

ja säde on $\frac{0,757\dots\text{ m}}{2} = 0,378\dots\text{ m}$.

Ympyrän pinta-ala on $\pi \cdot (0,378\dots\text{m})^2 = 0,450\dots\text{ m}^2 \approx 0,45\text{ m}^2$.

Vastaus: $0,45\text{ m}^2$.

K48.



Lasketaan ensin pohjalävistäjän pituus x Pythagoraan lauseella.

$$x^2 = 6,7^2 + 9,3^2$$

$$x = \pm\sqrt{131,38}$$

Hypotenuusan pituus on positiivinen, joten hylätään negatiivinen ratkaisu.

$$x = \sqrt{131,38} = 11,462\dots$$

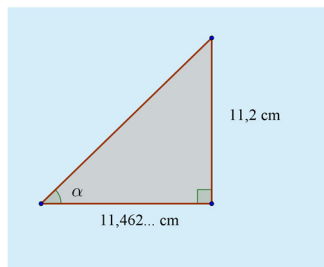
Lasketaan kysytty kulma α tangentin avulla.

$$\tan \alpha = \frac{11,2}{x}$$

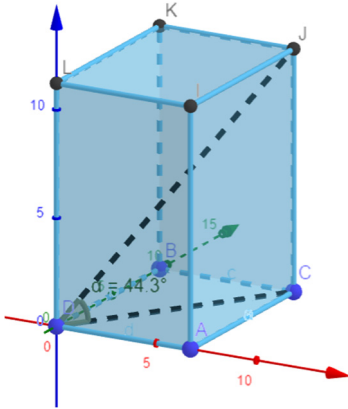
$$\tan \alpha = \frac{11,2}{11,462\dots}$$

$$\alpha = 44,337\dots^\circ$$

$$\alpha \approx 44^\circ$$



Tarkistetaan piirtämällä.



Vastaus: 44°

K49. Yksi pölyhiukkanen vie kuutionmuotoisen tilan. Sen kuution särmäpituus on hiukkasen halkaisija eli viisi tuhannesosamillimetriä eli 0,005 mm.

Tällöin kuution tilavuus on

$$V = (0,005\text{mm})^3 = 0,000000125 \text{ mm}^3 = 1,25 \cdot 10^{-7} \text{ mm}^3.$$

Yksi kuutiometri on $1 \text{ m}^3 = 1 \cdot 10^9 \text{ mm}^3$.

Yhteen kuutiometriin mahtuu pölyhiukkaisia siten

$$\frac{1 \cdot 10^9}{1,25 \cdot 10^{-7}} = 8 \cdot 10^{15} \text{ kappaletta.}$$

Vastaus: $8 \cdot 10^{15}$

K50. Täydennetään taulukkoon sopivat kirjaimet laskettaville mitoille.

	leveys (cm)	korkeus (cm)	kokonaispinta-ala (cm ²)	tilavuus (cm ³)
pieni rasia	35	20	A	42
iso rasia	x	30	180	V

Ratkaistaan tuntemattomat luvut verrantojen avulla.

Koska kappaleet ovat yhdenmuotoisia, on niiden vastinosien pituuksien suhde vakio.

$$\begin{aligned}\frac{35}{x} &= \frac{20}{30} \\ 20x &= 35 \cdot 30 \\ 20x &= 1050 \quad \parallel : 20 \\ x &= 52,5 \\ x &\approx 53\end{aligned}$$

Mittakaava on vastinsivujen pituuksien suhde eli $\frac{20}{30} \stackrel{(10)}{=} \frac{2}{3}$.

Käytetään yhtälöissä supistettua muotoa $\frac{2}{3}$.

Yhdenmuotoisten kappaleiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

$$\begin{aligned}\frac{A}{180} &= \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ \frac{A}{180} &= \frac{2^2}{3^2} \\ \frac{A}{180} &= \frac{4}{9} \\ 9A &= 4 \cdot 180 \\ 9A &= 720 \quad \parallel : 9 \\ A &= 80\end{aligned}$$

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{42}{V} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$\frac{42}{V} = \frac{2^3}{3^3}$$

$$\frac{42}{V} = \frac{8}{27}$$

$$8V = 42 \cdot 27$$

$$8V = 1134 \quad ||: 8$$

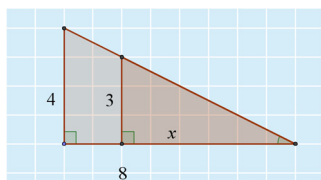
$$V = 141,75$$

$$V \approx 140$$

Vastaus:

	leveys (cm)	korkeus (cm)	kokonaispinta-ala (cm ²)	tilavuus (cm ³)
pieni rasia	35	20	80	42
iso rasia	53	30	180	140

- K51. a)** Kuvan pienempi kolmio ja isompi kolmio ovat yhdenmuotoiset kklauseen perusteella, koska molemmissa on suora kulma ja yksi sama kulma.



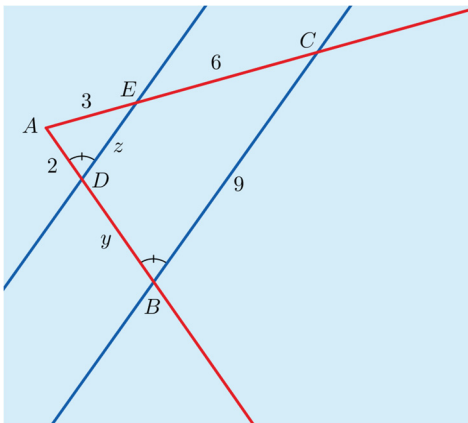
Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen suhde on vakio.

Muodostetaan yhdenmuotoisista kolmioista verranto ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned}\frac{x}{8} &= \frac{3}{4} \\ 4x &= 3 \cdot 8 \\ 4x &= 24 \quad ||: 4 \\ x &= 6\end{aligned}$$

Vastaus: $x = 6$

b) Merkitään kuvaan pisteitä yhdenmuotoisten kolmioiden löytämiseksi.



Kulma A on yhteinen kolmioille ABC ja ADE . Lisäksi kulmat CBA ja EDA ovat yhtä suuret. Siten kolmiot ABC ja ADE ovat kk -lauseen mukaan yhdenmuotoiset.

Yhdenmuotoisten kuvioiden vastinjanojen suhde on vakio.

Muodostetaan yhdenmuotoisista kolmioista verranto ja ratkaistaan se.

$$\begin{aligned}\frac{2}{2+y} &= \frac{3}{3+6} \\ \frac{2}{2+y} &= \frac{3}{9} \\ 3(2+y) &= 2 \cdot 9 \\ 6+3y &= 18 \\ 3y &= 18-6 \\ 3y &= 12 \quad ||: 3 \\ y &= 4\end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla saadaan verranto, jossa sivu z esiintyy.

$$\begin{aligned}\frac{z}{9} &= \frac{3}{3+6} \\ \frac{z}{9} &= \frac{3}{9} \\ 9z &= 3 \cdot 9 \\ 9z &= 27 \quad ||: 9 \\ z &= 3\end{aligned}$$

Vastaus: $y = 4, z = 3$

K52. a) Merkitään järven pituutta kartalla kirjaimella x .

Yhdenmuotoisten kuvioiden pituuksien suhde on mittakaava.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pituus x .

$$\begin{aligned}\frac{x}{45} &= \frac{1}{500000} \\ 500000x &= 45 \quad ||: 500000 \\ x &= \frac{45}{500000} \\ x &= 0,00009\end{aligned}$$

Pituus kartalla on $0,00009 \text{ km} = 9 \text{ cm}$

Vastaus: 9 cm

b) Merkitään järven pinta-alaa luonnossa kirjaimella A .

Yhdenmuotoisten kuvioiden pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä pinta-ala A .

$$\begin{aligned}\frac{7,6}{A} &= \left(\frac{1}{500000}\right)^2 \\ \frac{7,6}{A} &= \frac{1^2}{500000^2} \\ A &= 7,6 \cdot 500000^2 \\ A &= 1\,900\,000\,000\,000\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A &= 1\,900\,000\,000\,000 \text{ cm}^2 \\ &= 19\,000\,000\,000 \text{ dm}^2 \\ &= 190\,000\,000 \text{ m}^2 \\ &= 1\,900\,000 \text{ a} \\ &= 19\,000 \text{ ha} \\ &= 190 \text{ km}^2.\end{aligned}$$

Järven pinta-ala luonnossa on 190 km^2 .

Vastaus: 190 km^2

K53. Merkitään täyden juomalasin korkeutta kirjaimella h ja tilavuutta kirjaimella V . Puoliväliin asti täytetyn lasin korkeus on $0,5h$ ja merkitään sen tilavuutta kirjaimella x .

Taulukoidaan tehtävän tiedot.

	Tilavuus	Korkeus
Täysi lasi	V	h
Puoliväliin täytetty lasi	x	$0,5h$

Täysi juomalasi ja puoliväliin täytetty juomalasi ovat yhdenmuotoisia ja niiden korkeudet ovat vastinanoja, joten niiden tilavuuksien suhde on

$$\frac{V}{x} = \left(\frac{h}{0,5h} \right)^3.$$

Ratkaistaan yhtälöstä puoliväliin täytetyn lasin tilavuus x .

$$\frac{V}{x} = \left(\frac{h}{0,5h} \right)^3$$

$$\frac{V}{x} = \frac{h^3}{0,5^3 h^3}$$

$$\frac{V}{x} = \frac{1}{0,5^3}$$

$$\frac{V}{x} = \frac{1}{0,125}$$

$$x = 0,125V = \frac{1}{8}V$$

Puoliväliin täytetyn lasin tilavuus on $\frac{1}{8} = 0,125 = 12,5\%$ täyden lasin tilavuudesta.

Vastaus: $\frac{1}{8} = 12,5\%$

K54. Taulukoidaan kattiloiden korkeudet ja tilavuudet.

Korkeus (cm)	Tilavuus (l)
10	2
h	16

Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan siitä korkeus h .

$$\begin{aligned}\frac{16}{2} &= \left(\frac{h}{10}\right)^3 \\ \frac{16}{2} &= \frac{h^3}{1000} \\ 2h^3 &= 16 \cdot 1000 \\ 2h^3 &= 16000 \quad ||: 2 \\ h^3 &= 8000 \\ \sqrt[3]{h^3} &= \sqrt[3]{8000} \\ h &= 20\end{aligned}$$

Suuremman kattilan korkeus on 20 cm.

Vastaus: 20 cm.