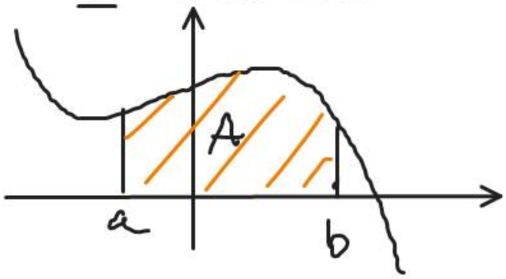
Pinta-alan määrittäminen

1. Käyrän ja x-akselin rajaama alue

Määritetään käyrän $y=f(x)$ ja x-akselin rajaaman alueen pinta-ala välillä $\underbrace{[a,b]}_{\text{integroimisrajat}}$

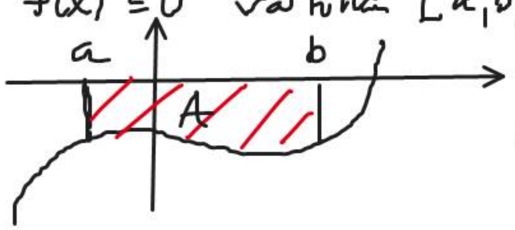
$\underline{1^\circ}$ $f(x) \geq 0$ välillä $[a,b]$



nyt $A = \int_a^b f(x)\,dx$

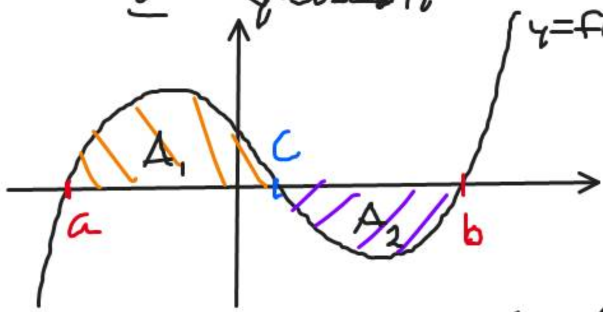
integroimisrajat voivat olla käyrän x-akselin leikkauskohdat, jotka saadaan yhtälöstä $f(x)=0$

$\underline{2^\circ}$ $f(x) \leq 0$ välillä $[a,b]$



nyt $A = -\int_a^b f(x)\,dx$

$\underline{3^\circ}$ yleisesti



käyrän $y=f(x)$ ja x-akselin rajaama alue

rajat saadaan funktion nollakohdista $x=a$, $x=c$ ja $x=b$

$$\left.\begin{aligned} &\text{välillä } [a,c] \quad f(x) \geq 0 \\ &\Rightarrow A_1 = \int_a^c f(x)\,dx \\ &\text{välillä } [c,b] \quad f(x) \leq 0 \\ &\Rightarrow A_2 = -\int_c^b f(x)\,dx \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\text{koko} \\ &A = A_1 + A_2 \end{aligned}$$

esim. Määritä käyrän $y = x^3 - x^2 - 2x$ ja x-akselin rajaamaan alueen pinta-ala

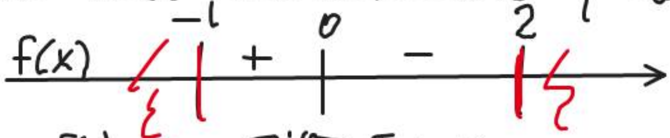
integroimisrajat saadaan nollakohdista eli yhtälöstä $x^3 - x^2 - 2x = 0$

$$x(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \text{tai} \quad x^2 - x - 2 = 0 \iff x = -1 \text{ tai } x = 2$$

1. alue tulee välille $[-1,0]$ ja 2. välille $[0,2]$

laaditaan merkkikaavio / hahmotellaan kuvaajaa



$f(x) \geq 0$ välillä $[-1,0]$

$$\Rightarrow A_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx$$

$$= \Big/_{-1}^{0} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)$$

$$= 0 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - 1\right)$$

$$= \frac{5}{12}$$

$f(x) \leq 0$ välillä $[0,2]$

$$\Rightarrow A_2 = -\int_{0}^{2} (x^3 - x^2 - 2x)\,dx$$

$$= -\Big/_{0}^{2} \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2\right)$$

$$= \Big/_{0}^{2} \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2\right)$$

$$= -4 + \frac{8}{3} + 4 - 0$$

$$= \frac{8}{3}$$

V: $A = A_1 + A_2 = \frac{37}{12} = 3\frac{1}{12}$