MATEMATIIKAN KOE, PITKÄ OPPIMÄÄRÄ 23.9.2015
HYVÄN VASTAUKSEN PIIRTEITÄ

Alla oleva vastausten piirteiden, sisältöjen ja pisteitysten luonnehdinta ei sido ylioppilastutkintolautakunnan arvostelua. Lopullisessa arvostelussa käytettävistä kriteereistä päättää tutkintoaineen sensorikunta.

Hyvästä suorituksesta näkyy, miten vastaukseen on päädytty. Ratkaisussa on oltava tarvittavat laskut tai muut riittävät perustelut sekä lopputulos. Arvioinnissa kiinnitetään huomiota kokonaisuuteen, ja ratkaisu pyritään arvioimaan kolmiosaisesti: alku, välivaiheet ja lopputulos. Laskuvirheet, jotka eivät olennaisesti muuta tehtävän luonnetta, eivät alenna pistemäärää merkittävästi. Sen sijaan tehtävän luonnetta muuttavat lasku- ja mallinnusvirheet saattavat alentaa pistemäärää huomattavasti.

Laskin on kokeen apuväline, jonka rooli arvioidaan tehtäväkohtaisesti. Jos ratkaisussa on käytetty symbolista laskintaa, sen on käytävä ilmi suorituksesta. Analysointia vaativien tehtävien ratkaisemisessa pelkkä laskimella saatu vastaus ei riitä ilman muita perusteluja. Sen sijaan laskimesta saatu tulos yleensä riittää rutiinitehtävissä ja laajempien tehtävien rutiiniosissa. Tällaisia ovat esimerkiksi lausekkeiden muokkaaminen, yhtälöiden ratkaiseminen sekä funktioiden derivointi ja integrointi.

Alustava pisteitys

1. a)	Sijoitetaan $x = 2015$ yhtälöön $ax = 2015 + a$. Saadaan $2015a = 2015 + a$	1
	$\Leftrightarrow (2015-1)a = 2015 \Leftrightarrow a = \frac{2015}{2014}$.	1
b)	Jos neliön sivu on s, niin lävistäjä on $s\sqrt{2}$. Ehto: $s\sqrt{2} = 6$,	1
	$\Leftrightarrow s = \frac{6}{\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$, joten piiri $4s = 12\sqrt{2}$ $[= 16{,}9705...]$	1
c)	Suurin luvuista saadaan, kun mahdollisimman suuri positiivinen luku jaetaan mahdollisimman pienellä positiivisella luvulla, eli $\frac{2}{2} = 1$.	1
	Pienin luku saadaan, kun ainut negatiivinen luku jaetaan mahdollisimman pienellä positiivisella luvulla, eli $\frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$.	1

2. a)	Suoran kulmakerroin $k=\frac{4-0}{3-0}=\frac{4}{3}$,	1
	joten sen yhtälö on $y=\frac{4}{3}x$ tai $4x-3y=0$.	1
b)	Ympyrän säde $r=$ pisteen (3,4) etäisyys origosta, eli $r=\sqrt{3^2+4^2}=5$.	1
	Yhtälö on $x^2+y^2=r^2$ eli $x^2+y^2=25$.	1
c)	Origohuippuisen, ylöspäin aukeavan paraabelin yhtälö on muotoa $y=ax^2$. Koska piste (3,4) on käyrällä, niin on voimassa: $4=a\cdot 3^2$	1
	$\Leftrightarrow a=\frac{4}{9}$, joten paraabelin yhtälö on $y=\frac{4}{9}x^2$.	1

3. a)	Jos polun pituus luonnossa on x, niin yhdenmuotoisuuden nojalla saadaan verranto $\frac{17{,}5}{x}=\frac{1}{20000}$, josta $x=20000\cdot 17{,}5=350000$ (cm). Vastaus: 3 500 m.	3
b)	Jos kuution särmä on s, niin tilavuus on $s^3=7\,\text{dm}^3$.	1
	Tällöin $s=\sqrt[3]{7}$ dm,	1
	josta sivutahkon ala $s^2=\left(\sqrt[3]{7}\right)^2\left[=\sqrt[3]{49}\right]=3{,}6593...\approx 3{,}66$ (dm^2). Vastaus: noin 366 cm^2.	1

4.	Vektoria $3\bar{i}+4\bar{j}$ vastaan kohtisuoria vektoreita ovat esimerkiksi vektorit $\bar{n}=\pm(4\bar{i}-3\bar{j})$, joiden pituus $=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5$.	1
	Näiden suuntaiset vektorit, joiden pituus on 3, ovat $\frac{3}{5}\bar{n}$.	1
	Täten $\overrightarrow{AB}=\pm(\frac{12}{5}\bar{i}-\frac{9}{5}\bar{j})$. Vektori $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}$.	1
	Saadaan $\overrightarrow{OB}=\bar{i}+2\bar{j}+\frac{12}{5}\bar{i}-\frac{9}{5}\bar{j}=\frac{17}{5}\bar{i}+\frac{1}{5}\bar{j}$ tai $\overrightarrow{OB}=\bar{i}+2\bar{j}-\frac{12}{5}\bar{i}+\frac{9}{5}\bar{j}=-\frac{7}{5}\bar{i}+\frac{19}{5}\bar{j}$.	1+1
	Pisteen B koordinaatit ovat siten $\left(\frac{17}{5},\frac{1}{5}\right)$ tai $\left(-\frac{7}{5},\frac{19}{5}\right)$.	1

5.	Jänteen keskipisteen etäisyys origosta on $a=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.	1
	Jänteen päätepisteen etäisyys origosta on = ympyrän säde $r=4$.	1
	Pythagoraan lauseen mukaan jänteen pituuden puolikas $b=\sqrt{r^2-a^2}$	2
	$=\sqrt{16-5}=\sqrt{11}$.	1
	Koko jänteen pituus on siten $2b=2\sqrt{11}$.	1
	TAI:	
	Olkoon $P=(2,1)$. Janan *OP* tulee olla kohtisuorassa jännettä vastaan. Koska janan *OP* kulmakerroin on $\frac{1}{2}$, niin jänteen kulmakertoimen tulee olla -2.	1
	Jänne on siten osa suoraa $y-1=-2(x-2)$ eli $y=-2x+5$.	1
	Leikkauspisteet saadaan yhtälöparista $\begin{cases} y=-2x+5 \\ x^2+y^2=16 \end{cases}$,	1
	josta $\begin{cases} x=2+\sqrt{\frac{11}{5}} \\ y=1-2\sqrt{\frac{11}{5}} \end{cases} \vee \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{11}{5}} \\ y=1+2\sqrt{\frac{11}{5}} \end{cases}$.	2
	Jänteen pituus on $\sqrt{\left(2-\sqrt{\frac{11}{5}}-2-\sqrt{\frac{11}{5}}\right)^2+\left(1+2\sqrt{\frac{11}{5}}-1+2\sqrt{\frac{11}{5}}\right)^2}=\sqrt{4\cdot 11}=2\sqrt{11}$.	1

6. a)	Onnistumisen todennäköisyys $p_o=0{,}9$, jolloin epäonnistumiselle $p_e=1-0{,}9=0{,}1$. Pelien lukumäärä on *n*. Kyseessä on binomitodennäköisyys.	1
	P(neljästä yksi epäonnistuu) $=\binom{4}{1}\cdot 0{,}1^1\cdot 0{,}9^3=0{,}2916\approx 29$ %	1
b)	Binomijakauman odotusarvo $EX=np_o=4\cdot 0{,}9=3{,}6$.	2
c)	Ehto: $n\cdot 0{,}9\geq 10 \Leftrightarrow n\geq \frac{10}{0{,}9}=11{,}1111.....$	1
	Peliä täytyy siis pelata vähintään 12 kertaa.	1

7.	Koska kolmion kylki on a, niin kolmion korkeus $h=\frac{a}{\sqrt{2}}$. (Kuvio 7 lopussa)	1
	Jos huippukolmion korkeus on x, niin sisälle asetetun kolmion korkeus on $h-x$ ja sen pinta-ala $A(x)=\frac{1}{2}\cdot 2x(h-x)=\frac{a}{\sqrt{2}}x-x^2$, jossa $0\le x\le \frac{a}{\sqrt{2}}$.	2
	Koska funktion $A(x)$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, on sen huippukohta x nollakohtien 0 ja $\frac{a}{\sqrt{2}}$ keskiarvo, joten $x=\frac{a}{2\sqrt{2}}$.	1
	Tämä arvo antaa suurimman pinta-alan $A\left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{8}a^2$.	2

8.	Jos louhintatahti on a tonnia/vuosi, niin kivihiilivarat ovat vuoden 2015 alussa kaikkiaan $50a$ tonnia.	1
	Jos määriä lisättäisiin, niin vuoden $2015+t$ loppuun mennessä louhitut määrät olisivat yhteensä $a+1,025a+1,025^2 a+...+1,025^{t-1}a$ tonnia.	1
	Ehto: $\frac{a(1-1,025^t)}{1-1,025}=\frac{a(1,025^t-1)}{0,025}=50a$	1
	$\Leftrightarrow 1,025^t-1=1,25 \Leftrightarrow 1,025^t=2,25$.	1
	Ottamalla puolittain logaritmit: $t\lg 1,025=\lg 2,25$, $\Leftrightarrow t=\frac{\lg 2,25}{\lg 1,025}=32,8410...$	1
	jolloin $2015+t=2047,8410...$. Vastaus: Kivihiilivarat loppuisivat vuoden 2048 aikana.	1

9.	Pois leikattava osa koostuu suorasta ympyrälieriöstä ja kahdesta identtisestä pallosegmentistä. Omenan säde $R=5$ ja lieriön säde $r=1$. (Kuvio 9 lopussa)	
	Puolet lieriön korkeudesta on x, jolle suorakulmaisesta kolmiosta saadaan yhtälö $r^2+x^2=R^2$, josta $x=\sqrt{25-1}=2\sqrt{6}$.	1
	Lieriön tilavuus $V_l=\pi r^2\cdot 2x=4\pi\sqrt{6}=30,7811\ldots$.	1
	Pallosegmentin korkeus $h=5-x=5-2\sqrt{6}$.	1
	Pallosegmenttien yhteistilavuus $V_s=2\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right)=2\pi\left(5-2\sqrt{6}\right)^2\left(5-\frac{1}{3}\left(5-2\sqrt{6}\right)\right)=0,3184\ldots$.	1
	Koko pois leikatun osan tilavuus on $V_l+V_s=30,7811...+0,3184...=31,0996...$.	1
	Vertailu antaa tilavuuden hävikiksi $\frac{31,0996...}{\frac{4}{3}\pi\cdot 5^3}=0,0593...\approx 5,9\ \%$.	1

10. a)	Koska pituuksien jono on geometrinen, niin jonossa $b = qa$ ja $c = q^2 a$. Pythagoraan mukaan $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow a^2 + (qa)^2 = \left(q^2 a\right)^2$.	1
	Jakamalla puolittain luvulla a^2 saadaan yhtälö $q^4 - q^2 - 1 = 0$, josta $q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Etumerkki – ei kelpaa.	1
	Näin ollen suhdeluku $q = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$, jossa vain etumerkki + kelpaa. Vastaus: $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.	1
b)	Aritmeettisen jonon differenssi $= d$. Tällöin jono on $b - d, b, b + d$.	1
	Pythagoraan lause antaa $(b-d)^2 + b^2 = (b+d)^2$ $\Leftrightarrow b^2 - 4bd = 0 \Leftrightarrow b = 0 \vee b = 4d$.	1
	Jono on täten $3d, 4d, 5d$, jolloin suhde $a : b : c = 3 : 4 : 5$.	1

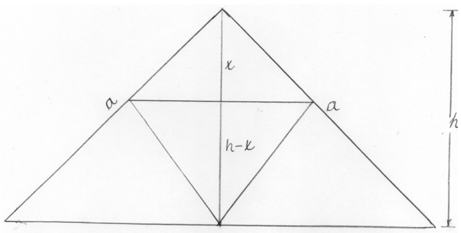
11. a)	Numeroiden summan $45 + 4n$ tulee olla jaollinen luvulla 3. Koska summan ensimmäinen termi jo on jaollinen kolmella, tulee toisenkin olla.	1
	Koska kuitenkaan tekijä 4 ei ole jaollinen kolmella, niin tekijän n tulee olla. Siten $n = 0,3,6$ tai 9.	1
b)	Luku on jaollinen luvulla 6 vain, jos se on jaollinen sekä luvulla 2 että luvulla 3.	1
	Näin ollen numeron n tulee kuulua sekä joukkoon $\{0,2,4,6,8\}$ että $\{0,3,6,9\}$. Molempiin kuuluvat vain numerot 0 ja 6.	1
c)	Numeroiden summan $45 + 4n$ tulee olla jaollinen luvulla 9.	1
	Kohdan a tapaan päätellään, että $n = 0$ tai 9.	1

12.	Koska $x - 1$ ja $x + 3$ ovat polynomin tekijöitä, myös $(x-1)(x+3) = x^2 + 2x - 3$ on tekijä.	2
	Saadaan $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 4x - 3 = (cx + d)(x^2 + 2x - 3)$.	1
	Tästä on auki kertomalla ja kertoimia vertaamalla pääteltävissä, että $c = 2$ ja $d = 1$.	1
	Kolmas tekijä on siten $2x + 1$ ja kolmas nollakohta $-\frac{1}{2}$.	1
	Yhtälön $P(x) = 0$ kaikki juuret ovat näin ollen $-3, -\frac{1}{2}$ ja 1.	1

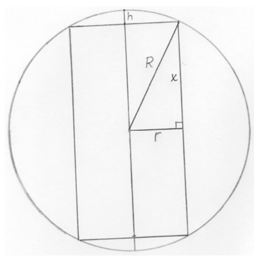
13. a)	Esimerkkijono $a_n = (-1)^n$ eli jono $-1,1,-1,1,-1,...,$	1
	Jono on rajoitettu, sillä kaikilla $n = 1,2,3,...$ pätee $\lvert a_n \rvert = 1$. Jono ei suppene.	1
b)	Esimerkkijono $a_n = -n$ eli jono $(-1,-2,-3,...)$,	1
	Jono on vähenevä, sillä kaikilla $n = 1,2,3,...$ pätee $a_{n+1} - a_n = -(n+1) - (-n) = -1 < 0$. Se ei ole myöskään rajoitettu, sillä $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.	1
c)	Ehto toteutuu esim., kun $p = 2$, sillä i) $\int_1^\infty x^{-2}dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int_1^k x^{-2}dx = \lim\limits_{k\to\infty} \Big/_1^k -x^{-1} = \lim\limits_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) = 1$, joten integraali suppenee.	1
	ii) $\int_1^\infty \sqrt{x^{-2}}dx = \lim\limits_{k\to\infty} \int_1^k x^{-1}dx = \lim\limits_{k\to\infty} \Big/_1^k \ln\lvert x \rvert = \lim\limits_{k\to\infty} \ln k = \infty$, joten integraali hajaantuu.	1

***14. a)**	Suoran suuntavektori on $\bar{s} = 2\bar{i} + 3\bar{j} + 7\bar{k}$, jonka pituus on $\sqrt{4+9+49} = \sqrt{62}$.	1
	Suuntakosinit ovat $\cos\alpha = \frac{\bar{s}\cdot\bar{i}}{\lvert\bar{s}\rvert\lvert\bar{i}\rvert} = \frac{2}{\sqrt{62}}$, $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{62}}$ ja $\cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{62}}$.	2
b)	Neliöiden summa on $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{4+9+49}{62} = 1$.	2
c)	$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{62}} = 0,2540... \Rightarrow \alpha = 75,2856...^\circ \approx 75,3^\circ$ $\cos\beta = \frac{3}{\sqrt{62}} = 0,3810... \Rightarrow \beta = 67,6043...^\circ \approx 67,6^\circ$ $\cos\gamma = \frac{7}{\sqrt{62}} = 0,8890... \Rightarrow \gamma = 27,2520...^\circ \approx 27,3^\circ$	2
	Yksi kulma väärin	–1
	Kaksi tai kolme kulmaa väärin	–2
d)	Suoran suuntavektori on $\bar{s} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$. Sen pituuden neliö on $\lvert\bar{s}\rvert^2 = a^2 + b^2 + c^2$,	1
	joten $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{\lvert\bar{s}\rvert^2} + \frac{b^2}{\lvert\bar{s}\rvert^2} + \frac{c^2}{\lvert\bar{s}\rvert^2} = \frac{a^2+b^2+c^2}{\lvert\bar{s}\rvert^2} = 1$. Suuntakosinien neliöiden summa on siten kaikille origon kautta kulkeville suorille vakio 1.	1

***15. a)**	Jos $a = b$, niin kolmio on tasakylkinen ja tällöin myös $x = y$.	1
	Pythagoraan mukaan $k^2 = a^2 - x^2 = aa - xx$.	1
	Kun tässä toinen a korvataan b:llä ja toinen x korvataan y:llä, niin saadaan $k^2 = ab - xy$, josta väite seuraa.	1
b)	Olkoon kulman puolikas φ. Kosini- ja kulmanpuolittajalauseista saadaan ehdot $\begin{cases} x^2 = a^2 + k^2 - 2ak\cos\varphi \\ y^2 = b^2 + k^2 - 2bk\cos\varphi . \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{a}{b} \end{cases}$	1
	Ratkaistaan kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä $2k\cos\varphi$ ja merkitään tulokset samoiksi: $2k\cos\varphi = \dfrac{a^2 + k^2 - x^2}{a} = \dfrac{b^2 + k^2 - y^2}{b}$.	1
	Kerrotaan puolittain a:lla: $\dfrac{a}{b}(b^2 + k^2 - y^2) = a^2 + k^2 - x^2$.	1
	Korvataan $\dfrac{a}{b} \to \dfrac{x}{y}$ ja kerrotaan puolittain y:llä: $xb^2 + xk^2 - xy^2 = ya^2 + yk^2 - yx^2$. Ratkaistaan k^2: $k^2 = \dfrac{ya^2 - yx^2 + y^2x - xb^2}{x - y}$.	1
	Sijoitetaan $ya = bx$: $k^2 = \dfrac{abx - x^2y - aby + xy^2}{x - y}$.	1
	Ryhmitellään: $k^2 = \dfrac{abx - aby - x^2y + xy^2}{x - y} = \dfrac{ab(x-y) - xy(x-y)}{x - y} = ab - xy$, josta väite seuraa. Ratkaisu edellyttää, että $x - y \neq 0$, mutta ehto on voimassa, koska oletettiin, että $a \neq b$, jolloin myös $x \neq y$.	1



Kuvio 7



Kuvio 9