

2. Lyhyet kysymykset 12 p.

2.1 Sattumanvaraiseen järjestykseen sekoitetusta korttipakasta nostetaan 2 korttia, palauttamatta kortteja takaisin pakkaan. Millä todennäköisyydellä molemmat kortit ovat punaisia? 3 p.

*Korttipakassa on 52 korttia, joista jokaisella on maa (pata, risti hertta ja ruutu) ja jokaisessa maassa 13 korttia (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q tai K). Pata- ja risti-kortit ovat mustia, kun taas hertta- ja ruutu-kortit ovat punaisia.*

**RATKAISU**

$$\frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} = \frac{25}{102} \approx 0,2451$$

**PISTEYTYS**

Pelkästä oikeasta vastauksesta ilman perusteluja saa täydet 3p.

Jos annettu vain likiarvo tai murtolukua ei supistettu: max 2p

Jos laskettu  $\left(\frac{26}{52}\right)^2$  niin max 1p.

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

2.2 Korttipakasta valitaan 5 korttia korttitemppua varten. Montako eri tapaa tämä valinta on mahdollista tehdä?

3 p.

*Korttipakassa on 52 korttia, joista jokaisella on maa (pata, risti hertta ja ruutu) ja jokaisessa maassa 13 korttia (A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, J, Q tai K). Pata- ja risti-kortit ovat mustia, kun taas hertta- ja ruutu-kortit ovat punaisia.*

**RATKAISU**

$$\binom{52}{5} = 2598960$$

**PISTEYTYS**

Pelkästä oikeasta vastauksesta ilman perusteluja saa täydet 3p.

Jos laskettu osajoukkojen sijaan osajonoja eli

$$52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 = 311875200 \text{ niin } 1p.$$

Jos laskettu  $52^5 = 380204032$  niin 0p.

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

2.3 Yhdistysmessuille osallistui yhteensä 84 henkilöä. Heistä 33 kävi luennolla A ja 41 kävi luennolla B. Messuille osallistuneista henkilöistä 31 ei käynyt kummallakaan luennolla. Kuinka moni messukävijä kävi molemmilla luennolla? **3 p.**

#### RATKAISU

Ainakin toisella luennolla kävijöitä oli  $84-31=53$

Merkitään molemmilla luennolla käyneitä vakiolla  $k$ .

Silloin luennolla käyneet  $53=33+41-k$  josta  $k=21$ .

Eli molemmilla luennolla kävi 21 henkilöä.

#### PISTEYTYS

Pelkästä oikeasta vastauksesta ilman perusteluja saa täydet 3p.

Vastauksen hahmottamisessa voi käyttää Venn-diagrammia, josta voi saada 1p, vaikka laskut muuten menee väärin.

Laskusta  $84-31=53$  saa 1p.

Vastauksena  $33+41=74$  antaa 0p.

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

2.4 Viisipaikkaiseen henkilöautoon istuu kolme henkilöä. Heistä kahdella on ajokortti ja jonkun ajokortillisen on istuttava kuljettajan paikalla. Muut paikat voi täyttää haluamallaan tavalla ja jokainen paikka on erilainen. Montako eri istumajärjestystä on? **3 p.**

#### RATKAISU

Merkitään tyhjiä paikkoja X:llä, ajokortillisia henkilöitä A ja B, kolmatta henkilöä C ja auton paikkalista viisimerkkisenä listana, joista eka paikka on kuskin paikka. Nyt sopivia listoja ovat seuraavat:

ABCXX

ABXCX

ABXXC

ACBXX

ACXBX

ACXXB

AXBCX

AXBXC

AXCBX

AXCXB

AXXBC

AXXCB

BACXX

BAXCX

BAXXC

BCAXX

BCXAX

BCXXA

BXACX

BXAXC

BXCAX

BXCXA

BXXAC

BXXCA

Eli yhteensä 24 erilaista istumajärjestystä.

#### PISTEYTYS

Pelkästä oikeasta vastauksesta ilman perusteluja saa täydet 3p.

Oikeankaltainen listaus, mutta epähuomiossa on max 2 kohtaa jäänyt pois: 2p

Ratkaisu  $\frac{2}{5} \cdot \frac{5!}{2!}$  tai  $\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1}$  antaa myös 3p

Ratkaisu  $5! = 120$  antaa 0p

Ratkaisu  $\frac{5!}{2!} = 60$  tai  $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$  antaa max 2p

### 3. Silmälukujen summia ja tuloja 12 p.

Eräässä lautapelissä heitetään kahta arpakuutiota kerrallaan. Pelaaja tekee yhden tällaisen heiton.

3.1 Millä todennäköisyydellä pelaajan saamat silmäluvut ovat yhtä suuret? 3 p.

#### RATKAISU

Ensimmäinen heitto voi olla mikä vain, mutta toisen on oltava sama, joten kysytty todennäköisyys on  $1 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

#### PISTEYTYS

Oikea vastaus ilman perusteluja (täydet) 3p

Vastaus 1/36 antaa 0p

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

3.2 Millä todennäköisyydellä pelaajan saamien silmälukujen summa on kaksinumeroinen luku? 3 p.

#### RATKAISU

Taulukosta nähdään, että silmälukujen summa on kaksinumeroinen todennäköisyydellä  $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

summa	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

#### PISTEYTYS

Taulukko tai muu vastaava perustelu 2p

Oikea vastaus 1p

Oikea vastaus ilman perusteluja max 2p

Vastaus 3/11 antaa 0p

Vastaus, jossa selvästi näkyy ymmärrys 36:sta eri vaihtoehdosta antaa 1p, vaikka muuten lasku ja perustelut olisi väärin.

Sieventämätön vastaus antaa -1p (mutta pistevähennys vain kerran, jos samanlainen virhe myös muissa kohdissa)

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

3.3 Millä todennäköisyydellä pelaajan saamien silmälukujen tulo on pariton? 3 p.

3 p.

#### RATKAISU

Taulukosta nähdään, että silmälukujen tulo on pariton todennäköisyydellä  $\frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

tulo	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

#### PISTEYTYS

Taulukko tai muu vastaava perustelu 2p

Oikea vastaus 1p

Oikea vastaus ilman perusteluja max 2p

Vastaus, jossa selvästi näkyy ymmärrys 36:sta eri vaihtoehdosta antaa 1p, vaikka muuten lasku ja perustelut olisi väärin.

Sieventämätön vastaus antaa -1p (mutta pistevähennys vain kerran, jos samanlainen virhe myös muissa kohdissa)

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

3.4 Millä todennäköisyydellä pelaajan saamien silmälukujen tulo on suurempi kuin niiden summa? 3 p.

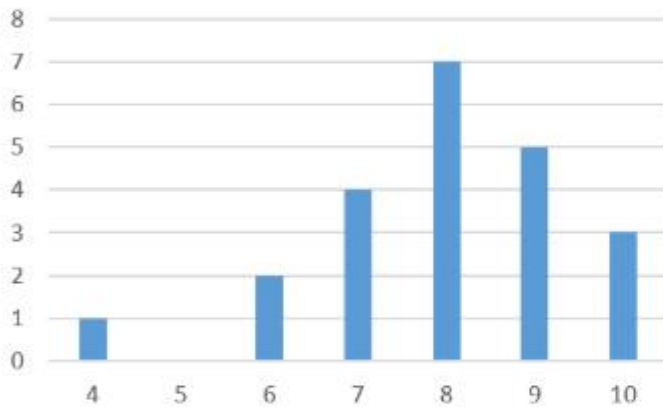
**RATKAISU**  
Edellisten kohtien taulukoita vertailemalla nähdään, että tulo on suurempi todennäköisyydellä  $\frac{24}{96} = \frac{1}{4}$ .

**PISTEYTYS**  
Vastaus, joka perusteltu edellisten kohtien taulukoilla 3p  
Vastauksen voi perustella myös muilla tavoilla, jolloin: perustelu 2p vastaus 1p  
Jos otettu mukaan silmäluvut 2 ja 2, vaikka se ei ole tulona suurempi kuin summa, niin -1p.

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

4. Opiskelijoiden arvosanoja 12 p.

### Arvosanojen frekvenssi



Kuvassa on erään opiskelijaryhmän matematiikan arvosanojen frekvenssi.

Mikä on ryhmän yleisin arvosana?

 2p

Kuinka monella opiskelijalla arvosana on alle kahdeksan?

 2p

Kuinka monta opiskelijaa ryhmässä on yhteensä?

 2p

Laske ryhmän arvosanojen keskiarvo yhden desimaalin tarkkuudella.

**PERUSTELUT**  
Yleisin arvosana on 8, koska sillä on suurin frekvenssi.  
Alle kahdeksan arvosana on seitsemällä opiskelijalla. (1 kpl "4", 2 kpl "6" ja 4 kpl "7".  $1+2+4 = 7$ ).  
Ryhmässä on yhteensä  $1+2+4+7+5+3 = 22$  opiskelijaa.

**RATKAISU**  
Arvosanojen keskiarvo on  
 $\frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 8 + 5 \cdot 9 + 3 \cdot 10}{22} = 7,9545454... \approx 8,0$

**PISTEYTYS**  
- frekvenssit kertoimina 2p  
- jakajana luku 2 2p  
- oikea vastaus 2p

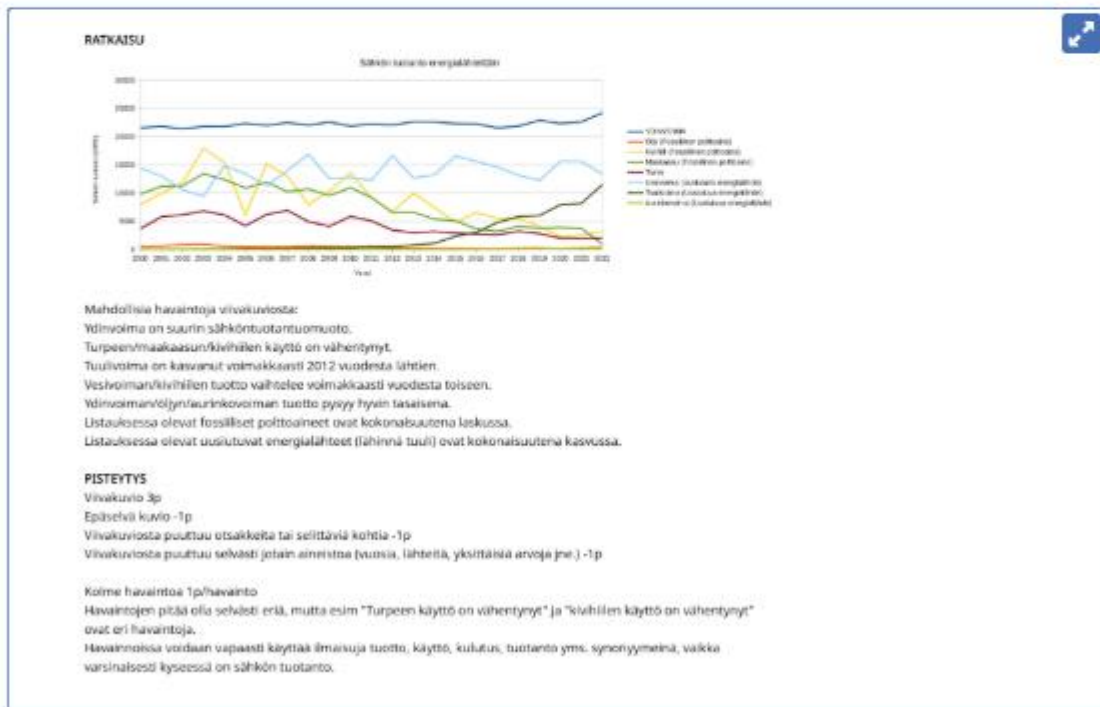
## 5. Sähkön tuotanto Suomessa 2000-2022 12 p.

Oheisessa aineistossa on koottu muutamien valikoidujen energialähteiden mukaisesti jaoteltuna vuoden 2000-2022 sähkön tuotannon energialähteet Suomessa.

### Aineisto

#### 5.A Sähkön tuotanto Suomessa energialähteittäin jaoteltuna vuosina 2000-2022

5.1 Muodosta viivakuviota, joka kuvastaa energialähteiden kehitystä vuosina 2000-2022. Kirjoita ainakin 3 havaintoa, jotka aineiston pohjalta voi tehdä. 6 p.



Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

5.2 Muodosta vuosien 2000 ja 2022 sähkötuotannon energialähteistä jonkinlainen vertaileva diagrammiesitys. 4 p.

**RATKAISU**

Tapa 1: Kaksi ympyrädiagrammia:  
 Vuoden 2000 sähkötuotanto eri energialähtein      Vuoden 2022 sähkötuotanto eri energialähtein

Tapa 2: Vierekkäiset pylväidiagrammit:  
 Vuosien 2000 ja 2022 sähkötuotanto energialähtein

**PISTEITYS**  
 Vertaileva(t) kuvio(t) 4p  
 Kuvioita voi täydentää sanallisesti, mutta sanallista vertailua ei tarvitse tehdä.  
 Jos vertailu kuvioista on vaikeaa tai hankalaa -1p  
 Epäselvä kuvio -1p  
 Kuvioista puuttuu otsakkeita tai selittäviä kohtia -1p  
 Kuvioista puuttuu selvästi jotain aineistoa -1p

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

5.3 Tutki vuosien 2000-2022 ydinvoiman tuottamaa sähköenergian määrää (yksikkö GWh). Määritä jokin sähköenergian määrä hyvin kuvaava keskiluku ja hajontaluku. 2 p.

**RATKAISU**  
 Esimerkiksi vuosittaisen tuotannon keskiarvo on 22249 GWh ja keskihajonta on 591,11 GWh.

**PISTEITYS**  
 Oikein lasketusta keskiluvusta 1p ja hajontaluvusta 1p.  
 Sekä mediaani (22266) että keskiarvo (22249,34) hyväksytään keskiluvuksi.  
 Sekä (otos)keskihajonta (591,11), varianssi (349400,96), että vaihteluvälin pituus (2847) hyväksytään hajontaluvuksi.

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

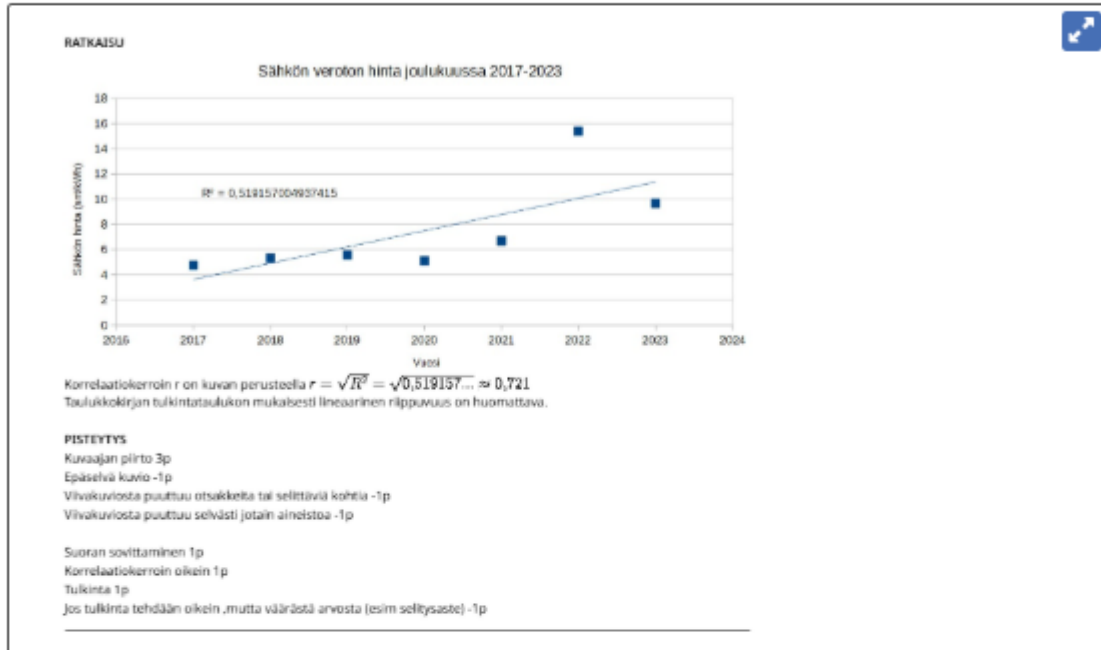
## 6. Joulun hinta 12 p.

Ohessa on annettu Suomen vuosien 2017-2023 joulukuiden verottoman sähköhinnan taulukko.

### Aineisto

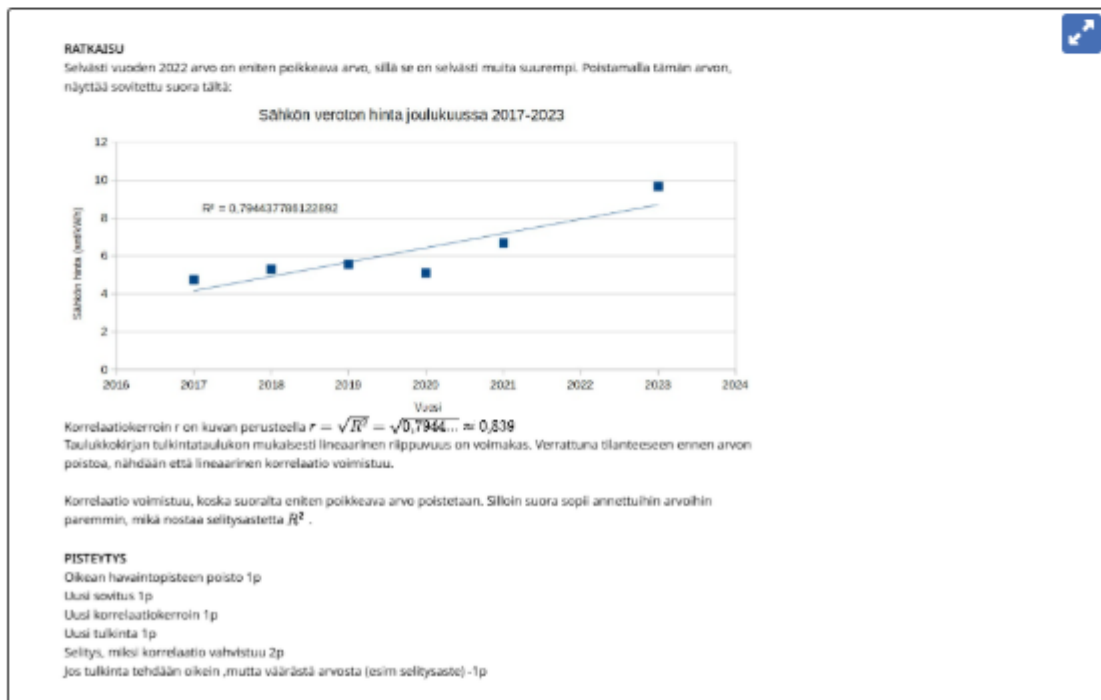
#### 6.A Joulukuiden sähköhinnat

6.1 Arvioi vuosiluvun ja sähköhinnan välistä lineaarista riippuvuutta korrelaatiokerroimen avulla. Esitä tuloksesi graafisesti ja sanallisesti. 6 p.



Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

6.2 Eräänä vuonna sähkön hinta oli poikkeuksellinen tilastoaineistossa. Arvioi vuosiluvun ja sähkön hinnan välistä lineaarista riippuvuutta, jos tämä vuosi jätetään pois. Kerro, miten edellisen kohdan tulokset muuttuvat ja miksi. 6 p.



## 7. Portin numerokoodi 12 p.

Talonomistaja on laittanut turvallisuuttaan parantaakseen talonsa tontille aidan ja sen porttiin lukon, jonka numerolukko toimii neljän numeron 0-9 yhdistelmällä, esim 1234 tai 0711.

Murtovaras koittaa päästä tontille kokeilemalla erilaisia numerosarjoja.

### 7.1 Kuinka monta erilaista numerosarjaa on? 2 p.

**RATKAISU**  
Numerosarjoja on  $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10\,000$

**PISTEYTYS**  
Oikea vastaus 2p  
Vastaus  $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$  antaa max 1p

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

### 7.2 Kuinka monta mahdollista numeroyhdistelmää on, jos numerosarjaksi on valittu jokin päivämäärä? Esimerkiksi 15. päivä helmikuuta olisi numerosarjana 1502. 2 p.

**RATKAISU**  
Päivämääriä on vuodessa 365 (karkausvuonna 366), joten yhdistelmiä on yhtä monta.

**PISTEYTYS**  
Vastaus 2p  
Molemmat ratkaisut 365 ja 366 hyväksytään.  
Ratkaisutavat, joissa koitetaan eri numeroiden lukumääriä, esim  $4 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10$  antaa 0p.

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

### 7.3 Varas näkee näppäimistä, että numero 8 on erityisen kulunut. Kuinka monta numerosarjaa on, jos ainakin yksi numerosarjan numeroista on 8? 4 p.

**RATKAISU**  
Jos ainakin yksi numeroista on kasi, on helpoin laskea komplementilla. Jos yksikään numeroista ei ole kasi, on niitä yhdistelmiä  $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$  koska ei-kaseja on 9 kappaletta. Tällöin ainakin yhden kasin sisältäviä numerosarjoja on  $10000 - 6561 = 3439$

**PISTEYTYS**  
Komplementti 2p  
vastaus 2p  
Voi tehdä myös laskemalla montako yhdistelmää, joissa 1 kasi, 2 kasia, 3 kasia tai 4 kasia. Tällä tavalla jokaisesta näistä saa 1p. Toinen sanoen: jos järjestyksiä ei otettu huomioon, tulee vain 1p (4 kasia kohdasta).

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

### 7.4 Jos ainakin yksi numeroista on 8 ja kyseessä on syntymäpäivä edellisten kohtien tavoin, niin montako numerosarjaa nyt on? 4 p.

**RATKAISU**  
Tarkastellaan joka kuukaudesta päivät, joissa on kaseja. Koska joka kuukaudesta löytyy 8, 18, ja 28. päivä, ja elokuusta löytyy kasi jokaisesta päivästä, on kasin sisältäviä päivämääriä  $3 \cdot 11 + 31 = 64$  kappaletta.

**PISTEYTYS**  
Elokuun päivien lukumäärä 1p  
Muista kuukausista löytyvät kaspäivät 1p  
Lasku ja vastaus 2p  
Ratkaisutavat, joissa koitetaan eri numeroiden lukumääriä, esim  $4 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10$  antaa 0p

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

## 8. Herneiden istutus 12 p.

Kotipuutarhuri istuttaa kolme hernettä multaan. Hernepussin tietojen mukaan herne itää 87,0 % todennäköisyydellä. Laske prosenttien kymmenesosan tarkkuudella todennäköisyydet

$P$ (Kaikki herneet itävät),  $P$ (Vähintään yksi herne itää) ja  $P$ (Täsmälleen yksi herne itää).

### RATKAISU

Oletetaan, että herneet itävät toisistaan riippumatta ja sovelletaan kertolaskusääntöä.

$P$ (Kaikki kolme hernettä itää)

$$= 0,87 \cdot 0,87 \cdot 0,87 = 0,668503 \approx 66,9 \%$$

Herne itää todennäköisyydellä 87 %, joten se ei itä todennäköisyydellä

$100 \% - 87 \% = 13 \%$ .

"Vähintään yksi herne itää" on tapahtuman "Yksiään herneistä ei itä" komplementti. Joten todennäköisyys

$P$ (Vähintään yksi herne itää)

$$= 1 - P(\text{Mikään herneistä ei itä})$$

$$= 1 - 0,13 \cdot 0,13 \cdot 0,13 = 0,997803 \approx 99,8 \%$$

Täsmälleen yksi herne itää voi tapahtua kolmella eri tavalla.

Vain ensimmäinen itää tai vain toinen itää tai vain kolmas itää.

Tämän todennäköisyys on

$$0,87 \cdot 0,13 \cdot 0,13 + 0,13 \cdot 0,87 \cdot 0,13 + 0,13 \cdot 0,13 \cdot 0,87 = 0,295191 \approx 29,5 \%$$

### PISTEYTYKSI

$P$ (Kaikki herneet itävät) =  $0,87 \cdot 0,87 \cdot 0,87 = 0,668503 \approx 66,9 \%$

- oikea tulkinta 0,87 1p

- kerrottu kolmesti (tai korotettu 3. potenssiin) 1p

- vastaus ja oikea tarkkuus 2p

$P$ (Vähintään yksi herne itää) =  $1 - 0,13 \cdot 0,13 \cdot 0,13 = 0,997803 \approx 99,8 \%$

- idea komplementista 1p

- herne ei itä todennäköisyydellä 0,13 1p

- oikea vastaus ja tarkkuus 2p

$P$ (Tasan yksi herne itää) =  $0,87 \cdot 0,13 \cdot 0,13 + 0,13 \cdot 0,87 \cdot 0,13 + 0,13 \cdot 0,13 \cdot 0,87 = 0,295191 \approx 29,5 \%$

- yksi tapa laskettu 1p

- kolme tapaa laskettu (tai kerrottu kolmella) 1p

- oikea vastaus ja tarkkuus 2p

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

## 9. Makkaroiden punnitus 12 p.

Aaretti punnitsi uteliaisuuttaan muutamia grillimakkaroita. Aaretti sai makkaroilta seuraavanlaisen tilaston:  
103 g, 103 g, 107 g, 105 g, 101 g, 98 g, 97 g, 102 g, 96 g, 105 g.

9.1 Mikä on makkarain painojen keskiarvo, moodi ja mediaani? Perustele vastauksesi. 6 p.

### RATKAISU

Moodi on se arvo, mitä esiintyy eniten. Moodeja on kaksi: 103 g ja 105 g, koska molempia esiintyy kaksi kertaa.  
Mediaani on suurusjärjestykseen järjestetyn listan keskimäinen arvo ja koska arvoja on parillinen määrä lasketaan kahden kesimmäisen arvon keskiarvo.

96, 97, 98, 101, 102, 103, 103, 105, 105, 105, 107

$$\frac{103+105}{2} = 102,5$$

Mediaani on 102,5 grammaa.

### PISTEYTYKSI

- moodi oikein ja perusteltu 2p.
- mediaani oikein ja perusteltu 2p.

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.

9.2 Aaretti punnitsi vielä yhden makkarain ja lisäsi sen tilastoon. Minkä painoinen lisätty makkara oli, kun makkaroiden painon keskiarvo oli lisätyn makkarain jälkeen 103 grammaa? 6 p.

### RATKAISU

Merkitään lisätyn makkarain painoa muuttujalla  $x$ . Muodostetaan yhtälö, jossa keskiarvo on yhtä suuri kuin 103.

$$\frac{96+97+98+101+102+103+103+105+105+107+x}{11} = 103 \quad || \cdot 11$$

$$1017 + x = 1133$$

$$x = 1133 - 1017 = 116$$

Vastaus: Lisätty makkara painoi 116 grammaa.

### PISTEYTYKSI

- muuttuja esitelty 1p
- muodostettu yhtälö keskiarvosta 3p
- ratkaistu yhtälö 4p

Vastauksen pituus: 0 merkkiä.