

MAAY01 kokeen ratkaisut S2023

2.1 Ratkaise yhtälö $-2(x + 1) = 3(x - 1) - 2x$. **4 p.**

$$-2(x + 1) = 3(x - 1) - 2x$$

$$-2x - 2 = 3x - 3 - 2x$$

$$-2x - 3x + 2x = -3 + 2$$

$$-3x = -1 \quad | : (-3)$$

$$x = \frac{1}{3}$$

Vastaus: $x = \frac{1}{3}$ |

2.2 Ratkaise yhtälö $\frac{x}{2} - \frac{2x+2}{3} = 1$. **4 p.**

$$\frac{x}{2} - \frac{2x+2}{3} = 1$$

$$\frac{3x}{6} - \frac{2(2x+2)}{6} = 1 \quad | \cdot 6$$

$$3x - 2(2x + 2) = 6$$

$$3x - 4x - 4 = 6$$

$$-x = 10 \quad | \cdot (-1)$$

$$x = -10$$

Vastaus: $x = -10$

2.3 Ratkaise yhtälö $2(x^3 - 5) - 6 = 0$. **4 p.**

$$2(x^3 - 5) - 6 = 0$$

$$2x^3 - 10 - 6 = 0$$

$$2x^3 = 16 \quad | : 2$$

$$x^3 = 8 \quad | \sqrt[3]{\quad}$$

$$x = 2$$

Vastaus $x = 2$

3.1 Laske lausekkeen $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$ arvo. Esitä välivaiheet. **3 p.**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{2}{4} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

3.2 Laske lausekkeen $\left(\frac{5}{2} : \frac{1}{4}\right)^{-2}$ arvo. Esitä välivaiheet. **3 p.**

$$\begin{aligned} & \left(\frac{5}{2} : \frac{1}{4}\right)^{-2} \\ & \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{1}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{20}{2}\right)^{-2} \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ &= \frac{1}{100} \end{aligned}$$

3.3 Sievennä lauseke $a^4(2b^2a)^2$. **3 p.**

$$\begin{aligned} & a^4(2b^2a)^2 \\ &= a^4 2^2 b^{2 \cdot 2} a^2 \\ &= 4a^{4+2} b^4 \\ &= 4a^6 b^4 \end{aligned}$$

3.4 Sievennä lauseke $\frac{(c^3)^{-2}c^8}{c}$, jossa $c \neq 0$. **3 p.**

$$\begin{aligned} & \frac{(c^3)^{-2}c^8}{c} \\ &= \frac{c^{-6}c^8}{c} \\ &= c^{-6+8-1} \\ &= c^1 \\ &= c \end{aligned}$$

4. Eväsrypäleet **12 p.**

Malla on lähdössä kiertämään 18 kilometrin pituisen Uittajan polun Seitsemisen kansallispuistoon. Hänellä on mukana viinirypäleitä. Malla on päättänyt jakaa viinirypäleet tasan jokaiselle tauolleen. Malla laski, että jos hän pitää kolme taukoa, voi hän syödä jokaisella tauolla neljä rypälettä enemmän kuin jos hän pitäisi viisi taukoa. Kuinka monta viinirypälettä Mallalla on mukana?

Olkoon Mallan viinirypäleiden määrä x .

Jos Malla pitää kolme taukoa, syö hän jokaisella tauolla $\frac{x}{3}$ viinirypälettä.

Jos Malla pitää viisi taukoa, syö hän jokaisella tauolla $\frac{x}{5}$ viinirypälettä. Muodostetaan yhtälö, kun tiedetään, että kolmen tauon taktiikalla edetessään Malla syö jokaisella tauolla neljä rypälettä enemmän, kuin viiden tauon taktiikalla edetessään.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \frac{x}{5} + 4 \\ \frac{5x}{15} &= \frac{3x}{15} + 4 \quad || \cdot 15 \\ 5x &= 3x + 60 \\ 2x &= 60 \quad || : 2 \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Vastaus: Mallalla on mukana 30 rypälettä.

5. Teijo-koiran matkaeväät **12 p.**

Teijo-koiralle on pakattu Pyhä-Luoston kansallispuiston vaellukselle mukaan kuivaruokaa yhteensä 1820 grammaa. Ruoat on pakattu 35 gramman ja 25 gramman pusseihin. Yhteensä pusseja on 60 kappaletta. Muodosta yhtälöpari ja ratkaise sen avulla, kuinka monta 35 gramman ja kuinka monta 25 gramman pussia Teijolle on pakattu mukaan.

Olkoon 35 gramman ruokapussien lukumäärää x ja 25 gramman ruokapussien lukumäärää y .

Ruokaa on yhteensä 1820 grammaa eli saadaan yhtälö

$$35x + 25y = 1820.$$

Toisaalta tiedetään, että pussien

yhteenlaskettu lukumäärä on 60 eli $x + y = 60$.

$$\begin{cases} x+y=60 \\ 35x+25y=1820 \end{cases} \Big|_{x, y}$$

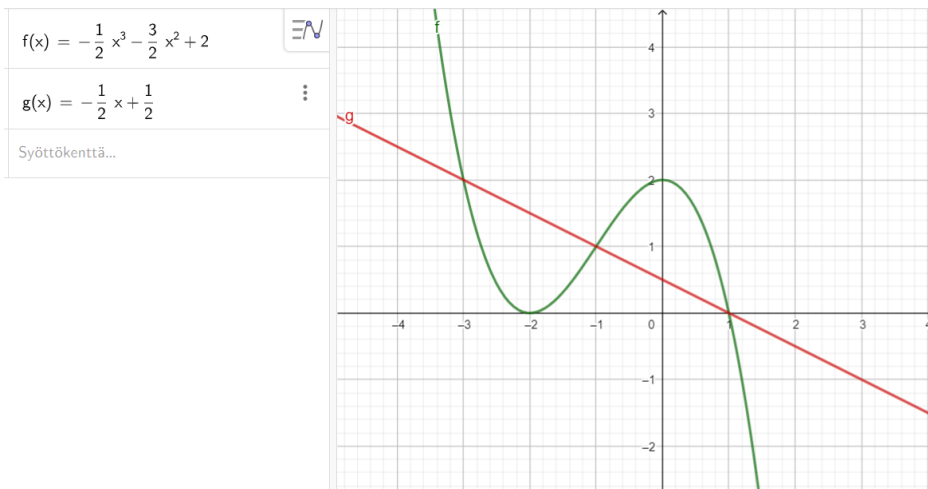
$$\{x=32, y=28\}$$

Vastaus: 35 g:n pusseja 32 kpl. ja 25 g:n pusseja 28 kpl.

6. Funktioiden kuvaajat 12 p.

Tarkastellaan funktioita $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$ ja $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ graafisesti.

6.1 Piirrä funktioiden kuvaajat samaan koordinaatistoon. Kuvankaappauksessa tulee näkyä kuvaajien lisäksi syöttämäsi lausekkeet. 3 p.



6.2 Millä muuttujan x arvoilla funktiot saavat saman arvon? Miten vastauksen näkee kuvaajien avulla? 3 p.

Kuvaajien leikkauspisteiden x -koordinaatit kertovat ne x :n arvot joilla funktiot saavat saman arvon, eli $x=-3$, $x=-1$ ja $x=1$.

6.3 Millä muuttujan x arvoilla funktio $f(x)$ saa suurempia arvoja kuin 0?

3 p.

$$x < -2 \text{ tai } -2 < x < 1$$

Tällöin kuvaaja on x-akselin yläpuolella.

6.4 Millä muuttujan x arvoilla funktion $f(x)$ arvot ovat suurempia kuin funktion $g(x)$ arvot? 3 p.

Funktio $f(x)$ saa suurempia arvoja kuin funktio $g(x)$ silloin kun $f(x) > g(x)$ kuvaaja on $g(x) > n$ yläpuolella, eli kun

$$x < -3 \text{ tai } -1 < x < 1$$

7. Rästaspääskykanta 12 p.

Rästaspääskykanta on Suomessa pienentynyt rajusti muun muassa maatalouden rakennemuutoksen myötä. Tällä hetkellä rästaspääskyjä arvioidaan olevan Suomessa noin 37 000 yksilöä. Määrä on pudonnut 74 prosenttia kahden vuosikymmenen takaisesta.

Lähde: <https://www.birdlife.fi/suojelu/lajit/autetaan-paaskyja/elintavat/> (Luettu 28.5.2023)

7.1 Kuinka monta rästaspääskyä oli 20 vuotta sitten? 3 p.

Koska kanta on pudonnut 74 % niin kanta on tullut 0,26 kertaiseksi. Olkoon alkuperäinen kanta x .
Voidaan muodostaa yhtälö

$$0,26x = 37000 \quad || : 0,26$$

$$x = 142307 \approx 140000$$

Vastaus: Kanta oli n. 140 000 yksilöä 20 vuotta sitten.

7.2 Jos rästaspääskykanta pienisi joka vuosikymmen yhtä monta prosenttia, kuinka monta prosenttia kanta olisi pienentynyt viimeisen kymmenen vuoden aikana? 3 p.

Jos kanta tulee vuosikymmenessä k -kertaiseksi niin kahdessa vuosikymmenessä kanta tukee k^2 -kertaiseksi. Hyödynnetään edellisen kohdan vastausta ja muodostetaan yhtä

$$142307 \cdot k^2 = 37000 \quad ||: 142307$$

$$k^2 = \frac{37000}{142307} \quad || \sqrt{\quad}$$

$$k = \pm 0,5099$$

Kanta tulee siis vuosikymmenessä n. 0,51-kertaiseksi eli pienenee 49 %.

Vastaus: Kanta olisi pienentynyt 49 % viimeisen vuosikymmenen aikana.

7.3 Kuinka paljon räystäspääskyjä on jäljellä neljän vuosikymmenen päästä nykyhetkestä, jos kanta jatkaa pienenemistään samalla prosenttiosuudella? **3 p.**

Jos kanta tulee vuosikymmenessä k -kertaiseksi niin neljässä vuosikymmenessä kanta tukee k^4 -kertaiseksi. Hyödynnetään edellisen kohdan vastausta ja lasketaan kannan suuruus

$$37000 \cdot 0,5099^4 = 2501 \approx 2500$$

Vastaus: Neljän vuosikymmenen kuluttua kannan suuruus olisi n. 2500 yksilöä.

7.4 Oletetaan suojelutoimien toimivan niin hyvin, että kanta ei enää tulevaisuudessa pieneneisi. Sen sijaan kantaa saataisiinkin kasvatettua niin, että se olisi kolmen vuosikymmenen kuluttua 20 prosenttia nykyistä suurempi.

Kuinka monta prosenttia olisi yhden vuosikymmenen aikainen kannan kasvu, jos oletetaan, että kanta kasvaisi joka vuosikymmenen aikana yhtä monta prosenttia? **3 p.**

Lasketaan ensin kannan suuruus kolmen vuosikymmenen kuluttua. Koska kanta kasvaa 20 % niin se tulee 1,2-kertaiseksi.

$$1,2 \cdot 37000 = 44400$$

Jos kanta tulee vuosikymmenessä p -kertaiseksi niin kolmessa vuosikymmenessä kanta tulee

p^3 -kertaiseksi. Muodostetaan ja ratkaistaan yhtälö.

$$37000 \cdot p^3 = 44400 \quad ||: 37000$$

$$p^3 = \frac{44400}{37000} \quad || \sqrt[3]{\quad}$$

$$p = 1,0626$$

Vastaus: Kanta kasvaisi n. 6,3 % vuosikymmenessä.

8.1 2,7 l maalia riittää $12,5 \text{ m}^2$: n alueen maalaamiseen. Hallissa on kaksi seinää mitkä kumpikin ovat pinta-alaltaan $40,5 \text{ m}^2$ ja kaksi seinää mitkä kumpikin ovat pinta-alaltaan $31,5 \text{ m}^2$. Kuinka paljon maalia tarvitaan hallin kaikkien seinien maalaamiseen?

4 p.

Tarvittavan maalin määrä on suoraan verrannollinen seinien pinta-alaan. Lasketaan ensin seinien kokonaispinta-ala.

$$2 \cdot 40,5 \text{ m}^2 + 2 \cdot 31,5 \text{ m}^2 = 144 \text{ m}^2$$

Tehdäänverranto

<i>Ala</i> (m^2)	<i>Maalia</i> (l)		
12,5	2,7	$\frac{12,5}{144} = \frac{2,7}{x}$	kerrotaan ristiin
144	x		

$$12,5x = 2,7 \cdot 144 \quad || : 12,5$$

$$x = 31,104 \text{ l} \approx 31 \text{ l}$$

Vastaus: Maalia tarvitaan n. 31 litraa.

8.2 Nurmikon leikkaaminen 55 cm leveällä leikkurilla kesti 1 h 35 min. Leikkuri vaihdettiin uuteen 85 cm leveään leikkuriin. Kuinka kauan saman nurmikon leikkaaminen kesti uudella leikkurilla?

4 p.

Mitä leveämpi on leikkuri niin sitä nopeammin nurmikon saa leikattua. Leveys ja aika ovat siis kääntäen verrannollisia suureita. 1 h 35 min. = 95 min.

<i>Leveys</i> (cm)	<i>Aika</i> (min.)	
55	95	Tehdään verrantojossa aika sarake käännetään.
85	x	

$$\frac{55}{85} = \frac{x}{95} \quad (\text{kerrotaan ristiin})$$

$$85x = 55 \cdot 95 \quad || : 85$$

$$x = 61,47 \text{ min} \approx 62 \text{ min.}$$

Vastaus: Nurmikon leikkaaminen uudella leikkurilla kestää n. 62 minuuttia.

8.3 Vedyn elektronien viritystilan energia on kääntäen verrannollinen pääkvanttiluvun neliöön.

Pääkvanttilukua 2 vastaavan viritystilan energia on $-3,4 \text{ eV}$. Mikä on pääkvanttilukua 5 vastaavan viritystilan energia?

4 p.

Koska tehtävässä on mainittu että energia on kääntäen verrannollinen pääkvanttiluvun neliöön eli toiseen potenssiin niin tehdään taulukko

Pääkvanttiluku² Energia (eV)

$$\begin{array}{cc} 2^2 & -3,4 \\ 5^2 & x \end{array}$$

Käännetään energia sarake ja muodostetaan verranto.

$$\frac{4}{25} = \frac{x}{-3,4} \quad \text{Kerrotaan ristiin}$$

$$25x = -3,4 \cdot 4 \quad || : 25$$

$$x = -0,544 \text{ eV} \approx -0,54 \text{ eV} \quad \text{Vastaus: Pääkvanttilukua 5 vastaava energia on -0,54 eV}$$