MAA 12 s25

2.

Olkoon $f\left(x\right)=-x^2+6$, missä $x\geq 0$.

1. Osoita, että funktiolla $f\left(x\right)$ on käänteisfunktio $f^{-1}\left(x\right)$.

RATKAISU
Polynomifunktio on jatkuva ja derivoituva kaikkialla ja siten myös kun $x\geq 0$.
Derivoidaan ja saadaan $f'\left(x\right)=-2x$.
Kun $x\geq 0$, derivaattafunktio $f'\left(x\right)\leq 0$.
Funktio $f\left(x\right)$ on siis aidosti vähenevä ja silloin sillä on käänteisfunktio.

PISTEYTYS
- Derivoidaan oikein. (1 p.)
- Todetaan, että derivaatta $f'\left(x\right)\leq 0$. (1 p.)
- Johtopäätös, että on olemassa käänteisfunktio. (1 p.)

2. Määritä käänteisfunktio $f^{-1}\left(x\right)$.

RATKAISU
Ratkaistaan x funktiolausekkeesta:
$y=-x^2+6$
$x^2=6-y$
$x=\pm\sqrt{6-y}$

Koska $x\geq 0$, valitaan positiivinen juuri $x=\sqrt{6-y}$.
Vaihdetaan x ja y jolloin saadaan lauseke $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt{6-x}$.
Tämän funktion määrittelyjoukko on $]-\infty,6]$, joka on myös alkuperäisen funktion arvojoukko.

Vastaus: $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt{6-x}$, määrittelyjoukko on $]-\infty,6]$

PISTEYTYS
- Ratkaistu $x=\pm\sqrt{6-y}$. (2 p.)
- Perusteltu ja valittu $x=\sqrt{6-y}$. (1 p.)
- Saatu lauseke $f^{-1}\left(x\right)=\sqrt{6-x}$. (1 p.)
- Määrittelyjoukko $]-\infty,6]$ mukana. (1 p.)

3. Määritä käänteisfunktion $f^{-1}(x)$ derivaatan arvo kohdassa $x = 2$.

RATKAISU

Vaihtoehto 1: Derivoidaan saatu käänteisfunktio suoraan.

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2}(6-x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1) = -\frac{1}{2\sqrt{6-x}}$.

Sijoitetaan $x = 2$ ja saadaan $(f^{-1})'(2) = -\frac{1}{2\sqrt{6-2}} = -\frac{1}{4}$.

PISTEYTYS

- Derivoitu oikein. (2 p.)
- Sijoitus oikein (1 p.)
- Vastaus oikein (1 p.)

Vaihtoehto 2: Käytetään käänteisfunktion derivointikaavaa pisteessä y_0.

$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, jossa $f(x_0) = y_0$.

Lasketaan x_0, kun $y_0 = 2$.

$-x^2 + 6 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$, siis valitaan $x_0 = 2$.

Derivoidaan $f(x)$, ja saadaan $f'(x) = -2x$. Silloin $f'(x_0) = f'(2) = -4$.

Saadaan siis $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(2)} = -\frac{1}{4}$.

PISTEYTYS

- Laskettu $x_0 = 2$ oikein. (1 p.)
- Derivoitu ja saatu $f'(x) = -2x$. (1 p.)
- Sijoitettu $x = 2$ edelliseen kaavaan. (1 p.)
- Käytetty derivointikaavaa ja saatu oikea tulos. (1 p.)

1. Esitä funktio $f(x) = |x-1|$ ilman itseisarvomerkintää.

RATKAISU
Ratkaistaan ensin epäyhtälö $x - 1 \geq 0$ ja saadaan $x \geq 1$.
Käytetään suoraan itseisarvon määritelmää ja saadaan

$$f(x) = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}.$$

PISTEYTYS
- Ratkaistu epäyhtälö. (1 p.)
- Vastaus oikein. (1 p.)

2. Laske $\int_{-2}^{3} x\,|x-1|\,dx$ ja anna tarkka vastaus.

RATKAISU
Tiedetään, että $|x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$.
Silloin $x\,|x-1| = \begin{cases} x^2-x, & x \geq 1 \\ -x^2+x, & x < 1 \end{cases}$.

Integraali pitää jakaa kahteen osaan, sillä kohdassa $x = 1$ integroitava lauseke muuttuu.

Saadaan $I_1 = \int_{-2}^{1} (-x^2 + x)\,dx = \Big/_{-2}^{1} \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \left(-\frac{-8}{3} + \frac{4}{2}\right)$
$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{8}{3} - 2 = -\frac{9}{2}$.

Ja toisella välillä saadaan $I_2 = \int_{1}^{3} (x^2 - x)\,dx = \Big/_{1}^{3} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right) = \frac{27}{3} - \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{26}{3} - \frac{12}{3} = \frac{14}{3}$.

Lasketaan integraalien arvot yhteen ja saadaan $I_1 + I_2 = -\frac{9}{2} + \frac{14}{3} = \frac{-27+28}{6} = \frac{1}{6}$.

PISTEYTYS
- Saatu $x\,|x-1| = \begin{cases} x^2-x, & x \geq 1 \\ -x^2+x, & x < 1 \end{cases}$. (1 p.)
- Todettu miksi integraali pitää jakaa kahteen osaan. (1 p.)
- Integraali 1: oikea sijoitus, oikeat välivaiheet näkyvillä ja oikea vastaus. (1 p. + 1 p. + 1p.)
- Integraali 2: oikea sijoitus, oikeat välivaiheet näkyvillä ja oikea vastaus. (1 p. + 1 p. + 1p.)
- Merkitty yhteenlasku ja saatu oikea vastaus. (1 p. + 1p.)

4.

1. Laske raja-arvo
$\lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{-2x+\sqrt{x^2-3x}}$.

RATKAISU

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-5x}{-2x+\sqrt{x^2-3x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x\left(-2x-\sqrt{x^2-3x}\right)}{\left(-2x+\sqrt{x^2-3x}\right)\left(-2x-\sqrt{x^2-3x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-5x\left(-2x-\sqrt{x^2-3x}\right)}{(-2x)^2-\left(\sqrt{x^2-3x}\right)^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x\left(-2x-\sqrt{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}\right)}{4x^2-(x^2-3x)}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-5x\left(-2x-|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)}{4x^2-(x^2-3x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-5x\left(-2x-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)}{3x^2-3x}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-5\left(-2x-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)}{3x-3} = \lim_{x\to\infty} \frac{5x\left(2+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)}{3x-3}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5\left(2+\sqrt{1-\frac{3}{x}}\right)}{3-\frac{3}{x}} = \frac{5(2+\sqrt{1-0})}{3-0} = 5.$$

PISTEYTYS
- Lavennus nimittäjän kaltaisella lausekkeella, jossa on miinusmerkki plusmerkin sijaan. (1 p.)
- Sievennyksen alku. (1 p.)
- Saatu sijoitusmuoto. (1 p.)
- Vastaus oikein. (1 p.)

2. Funktio f on jatkuva ja derivoituva origossa. Lisäksi tiedetään, että $f(0) = -1$ ja $f'(0) = \frac{1}{2}$. Määrää raja-arvo
$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)+h^2+h+1}{h}$.

RATKAISU

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h)+h^2+h+1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)+h^2+h-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(h)-f(0)}{h} + \frac{h^2+h}{h}\right)$$
$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(h)-f(0)}{h} + h + 1\right) = f'(0) + 0 + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

PISTEYTYS
- Sijoitettu $1 = -f(0)$. (1 p.)
- Eroteltu kaksi lauseketta. (1 p.)
- Saatu erotusmäärä ja toinen termi. (1 p.)
- Vastaus oikein. (1 p.)

3. Olkoon

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{jos } x < \pi, \\ \frac{\pi}{e^{2x}}, & \text{jos } x \geq \pi. \end{cases}$$

Käyrä $y = g(x)$ pyörähtää x -akselin ympäri. Määritä syntyneen pyörähdyskappaleen tilavuus.

RATKAISU

Pyörähdyskappaleen tilavuus on

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \pi g(x)^2 \ dx = \int_{\pi}^{\infty} \pi \ \left(\frac{\pi}{e^{2x}}\right)^2 \ dx = \lim_{M\to\infty} \int_{\pi}^{M} \frac{\pi^3 dx}{e^{4x}}$$

$$= \pi^3 \lim_{M\to\infty} \int_{\pi}^{M} e^{-4x} \ dx = \pi^3 \lim_{M\to\infty} \Big/_{\pi}^{M} - \frac{e^{-4x}}{4}$$

$$= -\frac{\pi^3}{4} \lim_{M\to\infty} \left(e^{-4M} - e^{-4\pi}\right) = -\frac{\pi^3}{4}\left(0 - e^{-4\pi}\right) = \frac{\pi^3}{4e^{4\pi}}.$$

PISTEYTYS

- Tilavuuden lauseke oikein. (1 p.)
- Epäoleellinen integraali merkitty oikein. (1 p.)
- Integroitu oikein. (1 p.)
- Vastaus oikein. (1 p.)

5.

Loispopulaatiot ovat keskeinen osa jokaisessa ekosysteemissä. Yksittäisen loispopulaation koon logaritmiä voidaan mallintaa normaalijakaumalla.

Eräällä broilerikasvattamolla on havaittu, että broilerit kantavat vaihtelevan määrän kanapunkkeja, jotka ovat broilerien loisia. Yksittäisen broilerin kantamien punkkien lukumäärän Briggsin logaritmin eli kymmenkantaisen logaritmin keskiarvoksi ja keskihajonnaksi on mitattu $3{,}11$ ja $0{,}87$.

1. Kuinka monella prosentilla broilereista on alle 5000 punkkia?

RATKAISU

Merkitään punkkien määrää satunnaismuuttujalla X ja sen Briggsin logaritmia satunnaismuuttujalla $Y = \lg \ X$.
Tehtävänannon perusteella $Y \sim N(3{,}11; \ 0{,}87)$.
Tällöin
$Z = \frac{Y-3{,}11}{0{,}87} \sim N(0, \ 1)$.
Koska $\lg \ x$ on aidosti kasvava, joten
$X < 5000 \ \Leftrightarrow \lg X \ < \ \lg 5000 \ \Leftrightarrow Y < \lg 5000.$
Lasketaan todennäköisyys
$P(X < 5000) = P(Y < \lg 5000) = P\left(Z < \frac{\lg 5000 - 3{,}11}{0{,}87}\right)$
$= P(Z < 0{,}67697702) \approx P(Z < 0{,}68) = \Phi(0{,}68) = 0{,}7517.$

Vastaus: Noin 75 prosentilla broilereista on alle 5000 punkkia.

PISTEYTYS

- Lukumäärän logaritmin käytön idea. (1 p.)
- Normitetun muuttujan käyttö. (1 p.)
- Uuden ylärajan hakeminen. (1 p.)
- Todennäköisyystapahtuma oikein. (1 p.)
- Standardoidun normaalijakauman kertymäfunktion käyttö. (1 p.)
- Oikea vastaus. (1 p.)

2. Kuinka paljon enintään punkkeja on 95 prosentilla broilereista?

RATKAISU
Määrätään a siten, että
$P(Z < a) = \Phi(a) = 0{,}95.$
Normaalijakauman taulukon perusteella
$\Phi(1{,}6449) = 0{,}95 \;\Rightarrow\; a = 1{,}6449.$
Saadaan punkkien määrälle x yhtälö
$\frac{\lg x - 3{,}11}{0{,}87} = 1{,}6449$
$\lg x = 1{,}6449 \cdot 0{,}87 + 3{,}11$
$\lg x = 4{,}541063$
$x = 10^{4{,}541063} = 34\ 759.$

Vastaus: 95 prosentilla broilereista on korkeintaan 35 000 punkkia.

PISTEYTYS
- Yhtälö, josta a määrätään, on oikein. (2 p.)
- Saatu a. (1 p.)
- Punkkien lukumäärän yhtälö oikein. (1 p.)
- Ratkaistu $\lg x$ oikein. (1 p.)
- Oikea vastaus. (1 p.)

7.

Emma on insinööri ja työskentelee uuden mittauslaitteen parissa. Laitteen lämpötilan T (celsiusasteina) ja siihen liittyvän jännitteen V (voltteina) välillä on seuraava yhteys:

$T(V) = V^3 - 5V^2 + 11V + 4$

Laitteen jännite voi vaihdella välillä $[1{,}4]$ ja lämpötila on välillä $[11{,}32]$.

1. Osoita, että lämpötilan T ja jännitteen V välillä on yksiselitteinen yhteys, eli että funktio $T(V)$ on kääntyvä (ja sillä on käänteisfunktio).

RATKAISU
Funktio on kääntyvä, jos se on aidosti monotoninen välillä $[1{,}4]$.
Tarkastellaan derivaattaa $T'(V) = 3V^2 - 10V + 11$.
Etsitään kriittiset pisteet, eli derivaatan nollakohdat, ja ratkaistaan yhtälö
$3V^2 - 10V + 11 = 0$.

$\text{solve}\left(3\cdot v^2-10\cdot v+11=0,v\right) \blacktriangleright \text{false}$

Derivaattafunktion kuvaaja on ylöspäin aukeava paraabeli. Koska nollakohtia ei ole, derivaattafunktion on positiivinen koko määrittelyvälillä. Täten funktio $T(V)$ on aidosti monotoninen koko välillä $[1{,}4]$.

PISTEYTYS
- Todettu monotonisuusehto. (1 p.)
- Derivoitu oikein. (1 p.)
- Muodostettu yhtälö derivaatan nollakohtien etsimiseksi. (1 p.)
- Todettu, että derivaatalla ei ole nollakohtaa. (1 p.)
- Perustelu (paraabelin kuvaaja) monotonisuudelle. (1 p.)
- Johtopäätös, että funktio on kääntyvä koko määrittelyalueella. (1 p.)

2. Emma mittaa laitteesta lämpötilaksi $30°C$. Mikä oli tällöin laitteen jännite V ?

RATKAISU
Ratkaistaan V , kun $T(V) = 30$.
Ratkaistaan yhtälö $V^3 - 5V^2 + 11V + 4 = 30$.
$V^3 - 5V^2 + 11V - 26 = 0$

$$\text{solve}\left(v^3-5\cdot v^2+11\cdot v-26=0,v\right) \blacktriangleright v=3.89037894$$

Jännite on siis $3{,}9$ volttia.

PISTEYTYS
- Ratkaistu saatu yhtälö. (1 p.)
- Vastaus 3,9 volttia. (1 p.)

3. Kuinka nopeasti jännite muuttuu lämpötilan muuttuessa $20°C$ kohdalla?

RATKAISU
Merkitään kohta $T_0 = 20$. Pitää laskea $V'(20)$.
Tehtävässä 1 laskettiin $T'(V) = 3V^2 - 10V + 11$.
Lasketaan se jäänite V_0 , joka vastaa lämpötilaa $T_0 = 20$:

$$\text{solve}\left(v^3-5\cdot v^2+11\cdot v+4=20,v\right) \blacktriangleright v=3.117850972$$

Eli $V_0 \approx 3{,}118$ volttia.
Käänteisfunktion derivaatta saadaan kaavasta $V'(T_o) = \frac{1}{T'(V_0)}$.

$$\left.\frac{1}{3\cdot v^2-10\cdot v+11}\right|v=3.117850972 \blacktriangleright 0.1113031173$$

Jännite muuttuu noin $0{,}11\ \frac{V}{°C}$ kohdassa $20°C$.

PISTEYTYS
- Ideapiste: Etsitään se jännite, joka vastaa lämpötilaa $T_0 = 20$. (1 p.)
- Saatu $V_0 \approx 3{,}118$. (1 p.)
- Näytetty derivaattakaava. (1 p.)
- Laskettu laskimella derivaatan arvo. (1 p.)
- Vastaus: Jännite muuttuu noin $0{,}11\ \frac{V}{°C}$ kohdassa $20°C$. (1 p.)

8.

1. Selitä, mitä tarkoitetaan epäoleellisella integraalilla ja miten sen suppenevuutta tutkitaan.

RATKAISU
Epäoleellisen integraalin perustapauksia on kaksi.
Epäoleellisia integraaleja esiintyy esimerkiksi silloin, kun integroimisväli on rajoittamaton eli väli on muotoa$]-\infty,\ a]$ tai $[b,\infty[$. Epäoleellisia integraaleja esiintyy myös äärellisen integroimisvälin $[a,\ b]$tapauksessa, jos integroituva funktio on määrittelemätön integroimisvälin jommassakummassa päätepisteistä.

Suppenevuutta tutkitaan raja-arvon ja vertailutestin avulla.

Raja-arvon avulla suppenevuutta tutkitaan niin, että aluksi lasketaan funktion integraali äärellisellä välillä ja tämän jälkeen lasketaan raja-arvo niin, että välin jompikumpi päätepisteistä lähenee ensimmäisessä tapauksessa joko ääretöntä tai miinus ääretöntä ja toisessa tapauksessa ongelmakohtaa a tai b.
Vertailutestissä funktiota verrataan toiseen, jonka integraalin käyttäytyminen tunnetaan, ja näin päätellään alkuperäisen integraalin suppenevuus tai hajaantuvuus.

PISTEYTYS
- Selitetty ensimmäinen tapaus epäoleellisista integraaleista. (1 p.)
- Selitetty toinen tapaus epäoleellisista integraaleista. (1 p.)
- Selitetty, miten tutkitaan suppenevuutta raja-arvoilla. (1 p.)
- Selitetty, miten tutkitaan suppenevuutta vertailuperiaatteella. (1 p.)

2. Tarkastele integraalin $I=\int_2^\infty \frac{1}{x^p}dx$ suppenevuutta eri vakion p arvoilla. Määritä, millä vakion p arvoilla integraali suppenee ja millä hajaantuu.

RATKAISU

Lasketaan $I=\int_2^\infty \frac{1}{x^p}dx$ tapauksessa $p=1$ raja-arvon avulla, jolloin saadaan
$\int_2^\infty \frac{1}{x}dx=\lim_{t\to\infty}\int_2^t \frac{1}{x}dx=\lim_{t\to\infty}\Big/_{1}^{t}\ \ln|x|=\lim_{t\to\infty}(\ln\ t-\ln 1)=\lim_{t\to\infty}\ \ln\ t=\infty$.
Integraali hajaantuu, kun $p=1$.

Lasketaan integraali tapauksessa $p\neq 1$ käyttäen sääntöä $\int x^{-p}dx=\frac{x^{1-p}}{1-p}$, $p\neq 1$.
Lasketaan määrätty integraali alarajana 2 ja ylärajana t , jolloin saadaan
$\Big/_{2}^{t}\ \frac{x^{1-p}}{1-p}=\frac{t^{1-p}}{1-p}-\frac{2^{1-p}}{1-p}$.
Tutkitaan, mitä lausekkeelle käy eri vakion p arvoilla rajankäynnissä $t\to\infty$.

Tarkastellaan eri tapauksia:
Jos $1-p<0$ eli $p>1$, niin $t^{1-p}\ \to 0$, kun $t\to\infty$. Tällöin integraali saa äärellisen arvon ja suppenee.
Jos $1-p>0$ eli $p<1$, niin $t^{1-p}\ \to\infty$, kun $t\to\infty$. Tässä tapauksessa integraali hajaantuu.

Vastaus: Integraali on suppeneva, jos ja vain jos $p>1$, ja hajaantuva, jos ja vain jos $p\leq 1$.

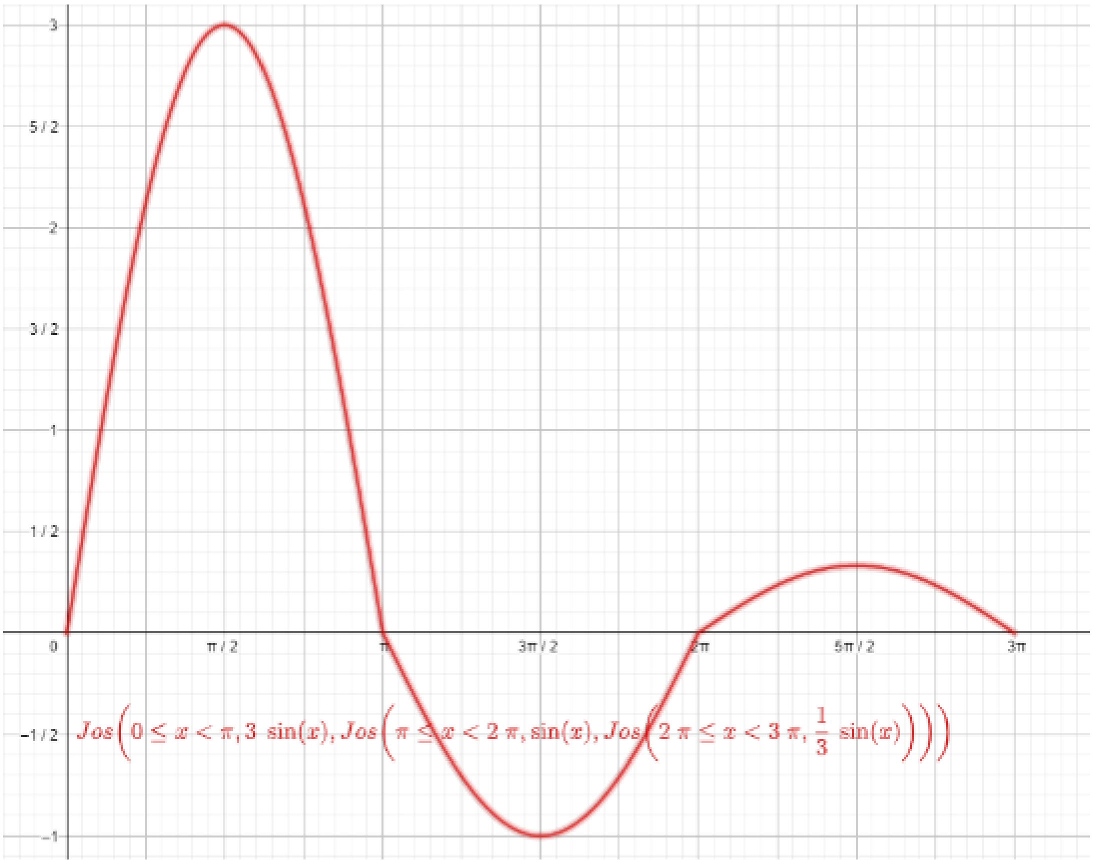
PISTEYTYS
- Tapaus $p=1$ tutkittu erikseen ja todettu hajaantuvaksi. (1 p.)
- Käytetty sääntöä $\int x^{-p}dx=\frac{x^{1-p}}{1-p}$, $p\neq 1$. (1 p.)
- Saatu $\Big/_{2}^{t}\ \frac{x^{1-p}}{1-p}=\frac{t^{1-p}}{1-p}-\frac{2^{1-p}}{1-p}$. (1 p.)
- Tarkasteltu eri tapauksia $p>1$ ja $p<1$, kun $t\to\infty$. (1 p. + 1 p.)
- Vastaus. (1 p.)

9.

Olkoon $f: [0, \infty[\to \mathbf{R}$,
$f(x) = 3^{1-n} \sin x$, kun $x \in [n\pi, (n+1)\pi[$, jossa $n = 0, 1, 2\ldots$

1. Piirrä funktion kuvaaja $y = f(x)$ välillä $[0, 3\pi[$.

RATKAISU
Kuvaaja saadaan piirrettyä paloittain määriteltynä funktiona
f(x):=Jos(0 ≤ x < π, 3sin(x), Jos(π ≤ x < 2π, sin(x), Jos(2π ≤ x < 3π, 1 / 3 sin(x))))



PISTEYTYS
- Kuvaaja, jossa näkyy funktion lauseke. (3 p.)

2. Laske integraali
$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\ dx$, kun $k \in \mathbf{N}$.

RATKAISU

Lasketaan integraali

$I_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\ dx = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} 3^{1-k} \sin\ x\ dx = 3^{1-k} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \sin x\ dx$

$= 3^{1-k} \Big/_{k\pi}^{(k+1)\pi} - \cos x = -3^{1-k} \left(\cos(k+1)\pi - \cos k\pi\right).$

Havaitaan, että

$\cos 0 = \cos 2\pi = \cos 2n\pi\ = 1$ja

$\cos \pi = \cos 3\pi = \cos(2n+1)\pi\ = -1,\ n \in \mathbf{N}.$

Näin ollen

$\cos k\pi = (-1)^k,\ k \in \mathbf{N},$

$I_k = -3^{1-k}\left(\cos(k+1)\pi - \cos k\pi\right) = -3^{1-k}\left((-1)^{k+1} - (-1)^k\right)$

$= -3^{1-k} \cdot (-1)^k \cdot (-2) = 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k.$

PISTEYTYS

- Integroitu oikein. (1 p.)
- Vastaus oikein joko yhtenä arvona tai paloittain k:n parittomuuden tai parillisuuden mukaan. (2 p.)

3. Käytä osatehtävässä 17.2 laskettua integraalia ja määritä integraali $S_m = \int_0^{m\pi} f(x)\ dx$, kun m on mielivaltainen positiivinen kokonaisluku.

RATKAISU

Integraalivälin osiin jakamisen perusteella

$S_m = \int_0^{m\pi} f(x)\ dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} f(x)\ dx = \sum_{k=0}^{m-1} I_k$

$= \sum_{k=0}^{m-1} 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k = 6 \cdot \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^m}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{9}{2}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^m\right).$

PISTEYTYS

- Tunnistettu, että integraali saadaan kohdan 2 avulla summana. (1 p.)
- Geometrisen summan hyödyntäminen. (1 p.)
- Vastaus oikein. (1 p.)

4. Määritä funktion kuvaajan $y = f(x)$ ja x -akselin välillä $[0,\ m\pi[,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, väliin jäävän moniosaisen alueen pinta-ala.

RATKAISU
Moniosaisen alueen pinta-ala on yksittäisten alueiden pinta-alojen summa
$A = \int_0^{m\pi} |f(x)|\ dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{k\cdot\pi}^{(k+1)\pi} |f(x)|\ dx$. Kullakin osavälillä
$[k\pi,\ (k+1)\pi[,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, funktio on samanmerkkinen, joten
$A = \sum_{k=0}^{m-1} \left| \int_{k\cdot\pi}^{(k+1)\pi} f(x) \right|\ dx = \sum_{k=0}^{m-1} |I_k| = \sum_{k=0}^{m-1} \left| 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^k \right|$
$= 6 \sum_{k=0}^{m-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 6 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^m}{1-\frac{1}{3}} = 9\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^m\right).$

PISTEYTYS
- Pinta-ala summana. (1 p.)
- Huomattu, että summattavana on osatehtävän 17.2 integraalin itseisarvo. (1 p.)
- Oikea vastaus. (1 p.)