7.19 **a)** Osoita, että funktiolla $f(x) = \ln x + x + 1$, $x > 0$, on käänteisfunktio $g = f^{-1}$.

b) Määritä käänteisfunktion derivaatta $g'(2)$.

c) Missä pisteissä funktion f kuvaaja leikkaa käänteisfunktion kuvaajan?

d) Kuinka suuressa kulmassa kuvaajat leikkaavat toisensa? [yo pitkä s2010]

d) $f(x)$:n ja $f^{-1}(x)$:n kuvaajat ovat symmetrisiä suoran $y = x$ suhteen, jolloin leikkaavat suoralla $y = x$

Ratkaistaan milloin $f(x) = x$

$$\ln x + x + 1 = x$$

$$\ln x = -1$$

$$\ln e^{-1} = -1$$

$$\underline{x = e^{-1} = \frac{1}{e}}$$

Raja-arvo äärettömyydessä

Esim. $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{3x^3-2x^2}{x^3-4x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x^3}\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{3}{1} = \underline{\underline{3}}$

$\frac{2}{x} \to 0$, $\frac{4}{x^2} \to 0$

$-2x^2 = -\frac{2x^3}{x} = x^3\left(-\frac{2}{x}\right)$

$-4x = -\frac{4x^3}{x^2} = x^3\left(-\frac{4}{x^2}\right)$

8.6 Määritä raja-arvo.

a) $\displaystyle \lim_{x\to\infty} \frac{1}{7^x} = \frac{1}{\infty} = 0$

kasvaa rajatta, kun $x \to \infty$

b) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{7}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{7}{3}\right)^{-\infty} = \frac{1}{\left(\frac{7}{3}\right)^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

8.4 Määritä raja-arvo.

a) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} (9x - x^5)$

b) $\displaystyle \lim_{x\to-\infty} \frac{6x+1}{\sqrt{9x^2+7}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}\left(6+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}} = \frac{6}{-3} = \underline{\underline{-2}}$

$\frac{1}{x} \to 0$; $|x| = -x$, -1; $\frac{7}{x^2} \to 0$ (kasvaa rajatta)

$\sqrt{9x^2+7} = \sqrt{x^2\left(9+\frac{7}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2}\sqrt{9+\frac{7}{x^2}} = |x|\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}$

8.8 Määritä raja-arvo.

~~CAS~~

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(7-\sqrt{x})$ **b)** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}$ "$\dfrac{\infty}{\infty}$"

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{5}}{} = \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{5})(\sqrt{x}+\sqrt{5})}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+5)} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{2x+10\underbrace{\sqrt{x}}_{\sqrt{x^2\cdot\frac{1}{x}}}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(1-\overbrace{\tfrac{5}{x}}^{\to 0})}{\cancel{x}(2+10\underbrace{\sqrt{\tfrac{1}{x}}}_{\to 0})} = \frac{1}{2}$$