6.21 ★★★ (ei CAS)

Olkoon $f: I \to \mathbf{R}$, $f(x) = xe^{2x-1}$.

a) Määritä mahdollisimman suuri sellainen origon sisältävä väli I, että funktiolla f on käänteisfunktio.

b) Määritä pisteet, joissa funktioiden $f(x)$ ja $f^{-1}(x)$ kuvaajat leikkaavat toisensa.

$(fg)' = f'g + fg'$

a) Tutkitaan derivaattaa

$f'(x) = 1 \cdot e^{2x-1} + x \cdot e^{2x-1} \cdot 2 = \underbrace{e^{2x-1}}_{>0}(1+2x)$

$f'(x) = 0$, kun $2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$

Merkkikaavio

	$-\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	$-$	$+$
$f(x)$		$\nearrow$

Vj. $x \geq -\frac{1}{2}$

b) $f(x)$:n ja $f^{-1}(x)$:n kuvaajat ovat symmetrisiä suoran $y = x$ suhteen $\Rightarrow$ kuvaajat leikkaavat suoralla $y = x$

Ratkaistaan $f(x) = x$

$xe^{2x-1} = x$

$xe^{2x-1} - x = 0$

$x(e^{2x-1} - 1) = 0$

$\underline{\underline{x = 0}} \lor e^{2x-1} - 1 = 0$

$e^{2x-1} = 1 = e^0$

$2x - 1 = 0$

$\underline{\underline{x = \frac{1}{2}}}$

7. $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, jossa $y_0 = f(x_0)$

Käänteisfunktion derivaatta

Esim. $f(x) = 3x - 2$. Määritä $(f^{-1})'(4)$

$y_0 = f(x_0)$

$4 = 3x_0 - 2$

$6 = 3x_0 \quad || :3$

$2 = x_0$

$f'(x) = 3$

$f'(2) = 3$

$(f^{-1})'(4) = \dfrac{1}{3}$

7.6 **a)** Osoita, että funktiolla $f(x) = x^3 + x + 3$ on käänteisfunktio.

b) Määritä käänteisfunktion f^{-1} derivaatta kohdissa 1 ja −7.

a) $f(x)$ on polynomifunktiona jatkuva kaikkialla

Tutkitaan monotonisuutta derivaatan avulla

$f'(x) = 3x^2 + 1$, nollakohdat: $\underbrace{3x^2+1}_{>0} = 0$ $\longrightarrow$

aidosti kasvavalla funktiolla on käänteisfunktio □

b) $(f^{-1})'(1)$ $\qquad$ $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$, kun $y_0 = f(x_0)$

$y_0 = f(x_0)$

$1 = x_0^3 + x_0 + 3$

$x_0^3 + x_0 + 2 = 0$

$x_0 = -1$

$f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 + 1 = 4$

$$(f^{-1})'(1) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$