10.19 **a)** Derivoi funktio $f(x) = x \ln x - x$.

CAS **b)** Laske funktion $g(x) = \ln x$ kuvaajan ja x-akselin välillä $]0, 1]$ rajaaman alueen pinta-ala. Käytä tietoa $\lim_{t \to 0+} t^t = 1$.

tulo $(fg)' = f'g + fg'$

a) $f(x) = x \ln x - x$

$f'(x) = 1 \cdot \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} - 1 = \underline{\underline{\ln x}}$

b) $\ln x$ ei ole määritelty, kun $x = 0$ (alaraja epäoleellinen)

$\ln x < 0$, kun $0 < x \le 1 \Rightarrow A = -\int_0^1 \ln x \, dx$

Lasketaan ensin $\int_a^1 \ln x \, dx = \Big/_a^1 \underbrace{x \ln x - x}_{a\text{-kohta}} = 1 \cdot \underbrace{\ln 1}_{0} - 1 - (a \ln a - a)$

$= -1 - a \ln a + a$

kun $a \to 0$: $\lim_{a \to 0} -1 - a \ln a + a = -1$

Pinta-ala $A = -\int_0^1 \ln x \, dx = -(-1) = \underline{\underline{1}}$

11.5 Laske epäoleellinen integraali.

CAS

a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3x}{x^2+2}\,dx$

a) Lasketaan paloissa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,dx}_{} + \int_{0}^{\infty} \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,dx$$

yhdistetty funktio $f(x)=x^2+1$; $g(x)=x^{-2}$

$f'(x)=2x$; $G(x)=\frac{1}{-1}x^{-1}=-\frac{1}{x}$

$\int f'(x)g(f(x))\,dx = G(f(x))+C$

Tutkitaan ensin $\displaystyle\int_{a}^{0} \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int_{a}^{0} 4x(x^2+1)^{-2}\,dx = 2\int_{a}^{0} 2x(x^2+1)^{-2}\,dx = 2\Big/_{a}^{0} -\frac{1}{x^2+1} = -2\left(\frac{1}{0^2+1}-\frac{1}{a^2+1}\right) = -2+\frac{2}{a^2+1}$

Kun $a \to -\infty$: $\displaystyle\lim_{a\to-\infty} -2+\frac{2}{\underbrace{a^2+1}_{\to\infty}} = -2$

Toinen puoli: $\displaystyle\int_{0}^{b} \frac{4x}{(x^2+1)^2}\,dx =$